第3章　平方根の計算

3.0　はじめに

整式の計算に続いて，実数についてお話をします。とはいうものの，ここでは主として中学校のときに勉強した平方根（根号のついた数）の計算を中心に話を展開します。

今まで多くの高校生を教えてきていますが，平方根は中学校の数学の難所のようですね。計算ができるレベルの人は結構いるものの，それが何を意味しているのか，についてまである程度理解している人にはあまり出会ったことがありません。

そこで本章では中学校の復習も兼ねて，元々のはじめから話を始めることにします。自分は十分理解している，と思っている人も気持ちを新たに，取り組んでください。

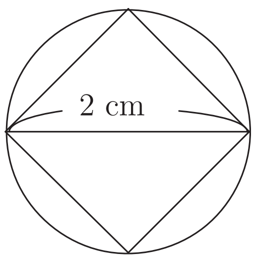
補講 7 では，平方根の大小に関する定理の証明を与えました。

補講 8 では，二重根号のはずしかたについて解説しました。入試で数学を使う予定の人は，必ず読んで身につけておいてください。

補講 10 では，平方根が二つしかないことを，式を使って証明して見せています。

3.1　なぜ根号のついた数を考えなければならないのか？

直径が 2 cm の円に内接する正方形を考え，この正方形の一辺の長さを求めることを考えましょう。



この値を求めるために，正方形の１辺の長さを x cm としましょう。すると面

積は x^2 cm^2 。またこの正方形の対角線の長さが 2 cm なので，面積は，

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

となります[1] 。よって

$$x^2 = 2$$

という方程式が得られます。

さて，正方形の１辺の長さを求めるためにこの方程式を解きたいのですが，実はこの方程式が **有理数の解をもたない**，つまり $x^2 = 2$ を満たす有理数はないことが知られています。この事実に関する詳しいことはあとの節（77 ページ）で説明しますので，とりあえずは信用してください。

ところが上で見たように x はある正方形の１辺の長さなのですから，これを表す数がなければいけません。そこで，このような方程式を満たす数があると考えます。

しかしこのような数は有理数ではないので，我々はそれの表わし方を持ちません。つまり，それを表す記号を新たに作らなければならないのです。

このようにして我々は新しい数，平方根の考え方に行きつくのです。

3.2　平方根

まず言葉を定めましょう。

定義 (平方根)　$a \geqq 0$ とする。２乗すると a となる数を a の **平方根**という。　**平方根**

(定義終)

注意　$a \geqq 0$ という条件に注意してください。詳しいことは 62 ページの注意参照。

(注意終)

先の正方形の一辺の長さは，方程式 $x^2 = 2$ の解でした。この方程式の解 x は，２乗すると 2 になる数です。

で，我々はこのような数が一つに定まることを期待したいのですが，実はそうはいきません。例を挙げて説明しましょう。

例　$2^2 = 4$ 。よって 2 は 4 の平方根です。また $(-2)^2 = 4$ でもあります。よって -2 も 4 の平方根です。つまり 4 の平方根は 2 と -2 です。　**(例終)**

[1] 対角線の長さがそれぞれ a, b のひし形の面積は $\frac{1}{2}ab$ で計算できます（なぜか？　考えてください)。
ちなみに正方形は，ひし形の特別な場合になっています。

この例で分かるように，４の平方根は２つあります。よって我々の目論見（もくろみ）は，しょっぱなから頓挫（とんざ）したようにみえます。しかしこの２つの数をよく見てみましょう。何か特徴はないでしょうか？

そう，一方は正，他方は負ですね。またいずれの絶対値も２になっています。

つまり平方根は，次のような特徴を持っていることが観察できます。

- ２つある。
- 一方は正，他方は負。
- 絶対値が等しい。

以下の問と例題をやることで，この特徴が他の数でも成り立っていることを納得してください[2]。

練習 35 16 の平方根を求めよ。

例題 7 (1) $\frac{4}{9}$ の平方根を求めよ。　　(2) 0.01 の平方根を求めよ。

解説　数が分数や小数になっただけで，別段驚くには当たりません。小数は分数に直した方が見つけやすいかもしれないですね。また $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ です。

解答例　(1)　$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ なので，$\frac{4}{9}$ の平方根は $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$ である。

(2)　$0.01 = \frac{1}{100}$ 。よって 0.01 の平方根は $\frac{1}{10}$ と $-\frac{1}{10}$ ，すなわち，0.1 と -0.1 。　**(解答例終)**

注意　与えられた数の平方根を求めるのは，慣れないとかなり面倒に感じるでしょう。かけ算に対する割り算のように，与えられた数を２乗することの逆の計算をしなければならないからです。

ここは，平方根のお話の中の第一の山場です。

また上の例題から感じ取れたと思いますが，

$$4 = 2^2, \quad 9 = 3^2, \quad 16 = 4^2, \quad 25 = 5^2, \quad 36 = 6^2, \quad \cdots$$

のような値を覚えていると比較的楽に見つけることができるでしょう。可能なら 19 くらいまで，最低でも 15 までの平方を記憶しておくと，いろいろな計算をするとき楽になります（ある整数の２乗の形に書ける数を **平方数** といいました）。

たくさん練習をつんで早く慣れてください。　**(注意終)**

[2]実は一つだけ例外があります。それは何でしょう？

練習 36 次の数の平方根をいえ。

(1) 64　　(2) 0　　(3) $\dfrac{25}{81}$　　(4) 1.44

上に挙げた例では平方根は整数，あるいは分数になっています。この場合は新しい数を考える必要がありません。しかし冒頭に述べたように 2 の平方根は有理数ではありません。

一方，平方根には先に述べたような特徴があります。そこで次のように記号を定めます。

定義 (根号)　正の数 a の平方根のうち，正の方を

$$\sqrt{a}$$

と表わし,「ルート a」 と読む。また記号 $\sqrt{}$ を **根号** と呼ぶ。　**根号**

また

$$\sqrt{0} = 0$$

と定める。　**(定義終)**

上の定義で「正の数」a となっていることに注意してください。これは後の注意で触れるように,「負の数」a に対しては平方根を考えることは今のところできないからです[3]。

また上の定義から a が 0 でなければ，$\sqrt{a}$ は「２乗すると a となる **正の** 数」になっています。このことにも留意してください。

さらに 61 ページで触れた平方根の特徴にあるように，与えられた数の平方根は２つあります。そして，それらの符号は異なるが，それらの絶対値は等しい。よってもう一つの平方根は $-\sqrt{a}$ と表わすことができます。

以上をまとめると

a の平方根は $\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ である。

注意　(a の平方根をいちいち「$\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ 」と表わすのは面倒なので，これを $\pm\sqrt{a}$ と表わすことにしましょう。記号 $\pm$ を **複号** と呼びます。　**(注意終)**　**複号**

さて，ここまでの例や例題，練習から気がついているかもしれませんが，負の数の平方根，たとえば -1 の平方根など，は一つも扱っていません。これは，そのような数に対応するものが我々の住む世界に存在しないからです。これを証明しておきましょう。

[3]「今のところ」という，ちょっと歯切れの悪いいい方をした理由は，方程式に関するお話をするところではっきりします。

まず不等式の性質に

$$(1)\quad a>b,\ c>0\,\text{ならば}\,ac>bc$$

と，

$$(2)\quad a>b,\ c<0\,\text{ならば}\,ac<bc$$

というものがあります。

さて，我々は次のことを証明したい。

定理 (実数の平方)　どんな数 a についても，$a^2 \geqq 0$

証明　（イ）$a=0$ のとき，$a^2=0$。

（ロ）$a \neq 0$ のとき，$a>0$ または $a<0$ である。まず $a>0$ ときは，上の不等式の性質の (1) で，$b=0,\ c=a$ の場合を考えれば $a^2>0$ となることが分かるまた $a<0$ のときは，上の不等式の性質 (2) で，$a=0,\ b=a,\ c=a$ の場合を考えれば，これも $a^2>0$ となる。

以上の結果をまとめると，どんな数 a についても $a \geqq 0$ であることが結論できる。 **(証明終)**

この定理から2乗して負の数，たとえば -1 ，になるような数がないことが分かります。実際そのような数 a があったとすると，$a^2=-1$ ですが，上の定理から $a^2 \geqq 0$ 。これが正しいとすると -1 が正の数になってしまいます。

このような変なことは起こるはずがありません。この変なことは2乗して -1 となる数があるとしたことから起きました。よって2乗して -1 となる数は存在しません[4]。

どのような数を平方根と呼ぶのか，つかめてきたでしょうか。

さらに慣れてもらうために，根号の使い方を例で示しましょう。

例　2 の平方根は $\pm\sqrt{2}$ 。 **(例終)**

与えられた数の平方根が，整数や分数にならない例を挙げましょう。

例題 8 次の数の平方根を根号を使って表わせ。

(1) 7　　(2) 8.3　　(3) $\dfrac{5}{7}$

解説　いずれも難しく考えずに上の定義通りに書けばよい。

[4] このような証明法を **背理法** といいます。この証明方法については，あとの節でいくぶん詳しく説明するので，そこを読んだ上でもう一度ここに戻り，じっくりと取り組んでみてほしい。ここでは，こんな証明方法もあるんだということだけを知っておいてください。

解答例　(1)　$\pm\sqrt{7}$　(2)　$\pm\sqrt{8.7}$　(3)　$\pm\sqrt{\dfrac{5}{7}}$　**(解答例終)**

さて，根号を使って 4 の平方根を表わすと，$\pm\sqrt{4}$ となります。しかし上にみたように 4 の平方根は ± 2 です。以上のことと根号の定め方から

$$\sqrt{4} = 2, \quad -\sqrt{4} = -2$$

であることがわかります。

例題 9 次の数を根号を使わずに表わせ。

(1) $\sqrt{25}$　(2) $-\sqrt{49}$　(3) $\sqrt{0.36}$　(4) $-\sqrt{\dfrac{9}{100}}$

解答例　$5^2 = 25,\ 7^2 = 49,\ (0.6)^2 = 0.36,\ \left(\dfrac{3}{10}\right)^2 = \dfrac{9}{100}$ より，

(1)　5　(2)　-7　(3)　0.6　(4)　$-\dfrac{3}{10}$　**(解答例終)**

練習 37 次の数を，根号を使わずに表せ。

(1) $\sqrt{64}$　(2) $-\sqrt{225}$　(3) $-\sqrt{1.21}$　(4) $\sqrt{\dfrac{16}{169}}$

以上の例や問から気がついてきている人もいると思いますが，根号を使った数では $\sqrt{4} = 2$ のように根号がはずせるものと，$\sqrt{2}$ のように根号のはずせないものがあります。どのようなときにはずせて，どのようなときにはずせないのか，次の節できちんと論じますが，良い問題なので先に進む前に皆さんなりに考えてみてください。

3.3　根号の性質

さて，先の節では根号を使って表わされる新しい数を紹介しました。次にやるべきことは，そういった数がどのような性質，法則を満たしているかを調べることです。そして次に根号を含む足し算，引き算，かけ算，割り算がどうなるのかを調べていきましょう。この節では前者について，次の節で後者について説明します。

3.3.1　平方根を２乗すると？

さてまず定義からすぐに分かることとして，$\sqrt{a}$ は２乗したら a となる正の数ですから，(今の場合 $\sqrt{a}$ が正であるということは使いませんが）式で書けば，

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

です。

また，$-\sqrt{a}$ は２乗すると a になる負の数ですから，

$$\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$$

です。

例　$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5,\quad \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 3$　**(例終)**

3.3.2　a^2 の平方根

上の話に続けてすると混乱する人が出てくるかもしれませんが，あえてここで触れましょう（一度混乱すると，きちんと理解できたとき，よりしっかりとした実力を身につけることができます。混乱することを恐れないように。混乱したままにしないように！）。

前節の例題をやっていて，$\sqrt{a}$ がいつ根号をはずすことができて整数や分数になるのか，そうでないのか判断に困った人はいないでしょうか？　これについては次の定理が役にたちます。

定理 ($\sqrt{a^2}$ の値)

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (\text{ただし } a \text{ は正の数}) \\ 0 & (\text{ただし } a = 0) \\ -a & (\text{ただし } a \text{ は負の数}) \end{cases}$$

注意　上の式の中で $-a$ が出てきますが，これは**負の数ではありません！**　a が負の数なので $-a$ は正です。つまりいずれの結論も $\geqq 0$ です。

また上の

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (\text{ただし } a \text{ は正の数}) \\ 0 & (\text{ただし } a = 0) \\ -a & (\text{ただし } a \text{ は負の数}) \end{cases}$$

は，通常

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (\text{ただし } a \geqq 0\ ) \\ -a & (\text{ただし } a \text{ は負の数}) \end{cases}$$

とまとめられます。実際 $a=0$ の場合は $\sqrt{a}=0$ で，a 自身に等しくなります。よって，第一の場合に組み込んでおいて問題はないのです。 **(注意終)**

右辺に式が三つあります。これは根号の中にある数が正なのか，0 なのか，負なのかによって結果が異なることを意味しています。しかし上の注意にあるように，最後に得られる数は 0 以上であることに注意してください。

具体的な数で確かめましょう。

例

$$\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$$
$$\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5)$$

2 行目の最後，$5=-(-5)$ の部分をよく見てください。この例の場合， $a=-5$ なので，定理の

$$\sqrt{a^2}=-a \quad (\text{ただし } a \text{ は負の数})$$

に合わせるためにこのような書き直しをしました。もう一度上の「注意」を見ておいてください。普通の答案では $\sqrt{(-5)^2}=5$ でやめて，このような書き換えはしません。念のため。

さて，この定理は **根号の中がある数の 2 乗のときには根号をはずすことができる**，ということをいっています。よってこれを $\sqrt{4}$ の場合に適用してみると，$4=2^2$ なので，

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$$

ですし，$1.21=1.1^2$ なので，

$$\sqrt{1.21}=\sqrt{1.1^2}=1.1$$

となります。

根号の中が分数のときには，分子と分母が両方とも平方数のときには根号をはずすことができます。たとえば，$\dfrac{4}{9}$ は，分子が $4=2^2$，分母が $9=3^2$ となっているので，

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

と根号をはずすことができます。 **(例終)**

問 20 根号の定義にしたがって，上の定理を証明せよ。

少し練習しましょう。

例題 10 次の数の中で根号がはずせるものを選び，簡単にせよ。

(1) $\sqrt{14}$ (2) $\sqrt{169}$ (3) $\sqrt{\dfrac{121}{64}}$ (4) $\sqrt{\dfrac{26}{49}}$

解説　先の注意で，

$$4=2^2,\quad 9=3^2,\quad 16=4^2,\quad 25=5^2,\quad 36=6^2,\quad \cdots$$

といった平方数を 20 くらいまで覚えておくといい，ということを書きました。ここではさっそくそれが役にたつでしょう。

$$169=13^2,\quad 121=11^2,\quad 64=8^2,\quad 49=7^2$$

で，14, 26 は平方数ではありません。

よって根号がはずせるのは (2) と (3) のみで，

$$\sqrt{169}=13,\quad \sqrt{\frac{121}{64}}=\frac{11}{8}$$

です。

解答例

$$\sqrt{169}=13,\ \sqrt{\frac{121}{64}}=\frac{11}{8}\ \cdots\ \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 38 次の数の中で根号がはずせるものを選び，簡単にせよ。

(1) $\sqrt{81}$　(2) $\sqrt{99}$　(3) $\sqrt{\dfrac{75}{144}}$　(4) $\sqrt{\dfrac{196}{36}}$

3.3.3　平方根の大小

面積がそれぞれ a, b の正方形を考えましょう（a も b も正の数であることに注意！）。

このとき，面積が a の正方形の１辺の長さは $\sqrt{a}$ となり，面積が b の正方形の１辺の長さは $\sqrt{b}$ となります。

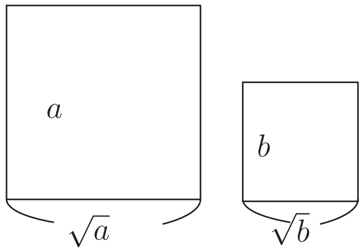
正方形では，１辺の長さが長くなると，それにつれて面積も大きくなりますし，また逆に面積が大きくなると，１辺の長さも長くなります。

このことから次のことがいえます[5]。

定理 (平方根の大小)　$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ とする。このとき

$$a<b \iff \sqrt{a}<\sqrt{b}$$

[5] これが証明になっていないことはすぐに分かるでしょう。厳密な証明は補講に与えておきます。



注意　$A \Longleftrightarrow B$ とは，$A \Longrightarrow B$ と $B \Longrightarrow B$ の二つが成り立つこと，記号を使わずにいうと,「A ならば B」と「B ならば A」の両方が成り立つことを意味する記号です。

(注意終)

この定理は,「根号のついた数の大小は，その中の数をくらべれば判定できる」，ということを保証しています。

例　$\sqrt{6}$ と $\sqrt{7}$ の大小を比べてみましょう。根号の中はそれぞれ 6 と 7 で，$6 < 7$ ですから，$\sqrt{6} < \sqrt{7}$ です。　**(例終)**

例　$\sqrt{8}$ と 3 の大小はどうでしょう。3 の方には根号がついていないので，すぐに判定することはできません。上の定理は両方とも根号を使って表わされる場合だけしか使えないのです。では $\sqrt{8}$ と 3 の大小は比べることができないのでしょうか？　そんなことはありません。次のようにやればできます。

実際,

$$3 = \sqrt{9}$$

ですから，$\sqrt{8}$ と 3 の大小を比べることは，$\sqrt{8}$ と $\sqrt{9}$ の大小を比べることと同じです。そして $8 < 9$ ですから，$\sqrt{8} < \sqrt{9}$。つまり $\sqrt{8} < 3$ です。　**(例終)**

例題 11 次の各組の数の大小を，不等号を使って表わせ。

(1) $\sqrt{0.2},\ \sqrt{\dfrac{1}{4}}$　　(2) $4,\ \sqrt{17}$　　(3) $1.2,\ \sqrt{1.2}$

解説　小数と分数が混ざっているような場合には，どちらかにそろえます。大小が比較しやすい方に，そろえるといいでしょう。

解答例　(1)　$\dfrac{1}{4} = 0.25$ で $0.2 < 0.25$ なので，$\sqrt{0.2} < \sqrt{\dfrac{1}{4}}$

(2)　$4 = \sqrt{16}$ で，$16 < 17$ より，$4 < \sqrt{17}$

(3)　$1.2 = \sqrt{1.44}$ で，$1.2 < 1.44$ より $1.2 > \sqrt{1.2}$　**(解答例終)**

実はここまでに挙げた例では上の定理の前半「$a < b$ ならば $\sqrt{a} < \sqrt{b}$」しか用いていません。後半の使い方を示す例を挙げてみましょう。

例題 12 x を整数とするとき，次の式を満たす x の値をすべて求めよ。

(1) $\sqrt{x} < \sqrt{5}$　　(2) $3 < \sqrt{x} < 4$

解説　上の定理の後半「$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ならば $a < b$」を使います。

(1) の方は定理の仮定の形になっていますので，

$$x < 5$$

となっています。ゆえにこの不等式を満たす整数すべてが答えとなります。

よって，$4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ \cdots$。

しかしこれは間違いです。この問題が単に「$x < 5$ を満たす整数 x を求めなさい」という問題なら $4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ \cdots$ という答えでよいのですが，元々の問題は「$\sqrt{x} < \sqrt{5}$ を満たす整数 x を求めよ」です。

先に注意したように，負の数の平方根を考えることはできません。よって，問題には何も書いてありませんが，ここには $0 \leqq x$ という条件が隠されています。

ゆえに $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ が正解となります。

(2)　$3 < \sqrt{x} < 4$ という不等式は，x は $3 < \sqrt{x}$ という不等式と，$\sqrt{x} < 4$ という不等式を同時に満たしているという意味です。よって (2) は，これらの不等式を同時に満たす x を求めよ，という問題です。

まず $3 < \sqrt{x}$ を満たす x は，先の定理の後半より $9 < x$ を満たします。つまり 9 より大きい整数です。

次に $\sqrt{x} < 4$ を満たす x は，同様に考えて $x < 16$ を満たします。よって x は 16 より小さな整数です。

ゆえに x は，9 より大きくて 16 より小さな整数となります。

つまり 10, 11, 12, 13, 14, 15 が答えとなります。

解答例　(1) 根号の中身を比較して

$$x < 5$$

また $0 \leqq x$ で，整数なので，

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \cdots \textbf{(答)}$$

(2) 与えられた不等式は，$\sqrt{9} < \sqrt{x} < \sqrt{16}$ と同じである。よって不等式の中を比べることで，

$$9 < x < 16$$

を得る。

ゆえに

$$x = 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 39 x を整数とするとき，次の式を満たす x の値をすべて求めよ。

(1) $\sqrt{12} < \sqrt{x} < \sqrt{17}$　(2) $4.5 < \sqrt{x} < 6.2$　(3) $-3 < -\sqrt{x} < -1$

3.4 根号を含む式の計算

前節の初めに述べましたように，この節では根号を含む式の計算のやり方について解説します。

3.4.1 根号を含んだ式の乗法・除法

話の都合があるので，かけ算と割り算から始め，足し算と引き算は後で説明することにします。

具体的な例，$\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ はどうなるか，からはじめましょう。

このままでは何も分からないので，$(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2$ を計算してみます。すると，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} \times \sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{3})^2 \\ &= 2 \times 3\end{aligned}$$

つまり $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ は 2 乗すると 2×3 となる数です（本来なら 2×3 を計算し 6 といいたいのですが，公式として後でまとめたいので，あえてこの形でとどめてあります)。また先に注意しましたように $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は正の数でしたから，それらをかけたものも正。よって $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ は，2 乗すると 2×3 となる正の数です。ゆえに根号の定め方から，

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3}$$

という等式が成り立つことが結論できます。

同じようにして等式

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

が成り立つと結論できます。

問 21 上の等式

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

が成り立つことを説明せよ。

上では $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ で例示しましたが，これはどんな数でもかまいません。よって次の定理が成り立ちます。

定理 (平方根のかけ算と割り算) $a > 0,\ b > 0$ のとき，

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

問 22 上の等式を証明せよ。

公式の使い方を，例で示しましょう

例

$$\begin{aligned} \sqrt{8} \times \sqrt{2} &= \sqrt{8 \times 2} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \\ \sqrt{18} \div \sqrt{12} &= \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{\frac{18}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(例終)

根号の中が何かの 2 乗の形のときには，根号をはずすことができました。実はそうなっていなくても，少し形を簡単にすることができることがあります。

実際，上の公式を逆に見て，$\sqrt{a^2}$ の公式を適用することで次の公式を得ます。

定理 (根号の簡約) $k,\ a$ を正の数とするとき，

$$\sqrt{k^2 \times a} = k\sqrt{a}$$

証明

$$
\begin{aligned}
\sqrt{k^2 \times a} &= \sqrt{k^2} \times \sqrt{a} \\
&= k \times \sqrt{a} \qquad (k > 0 \text{ という仮定を使った}) \\
&= k\sqrt{a}
\end{aligned}
$$

(証明終)

注意　$k \times \sqrt{a}$ は，$k\sqrt{a}$ と表わすのが数学の習慣です。　**(注意終)**

例　$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$　**(例終)**

練習 40 次の数を $a\sqrt{b}$ の形になおせ。

(1) $\sqrt{18}$　(2) $\sqrt{45}$　(3) $\sqrt{40}$　(4) $\sqrt{5000}$

3.4.2　分母の有理化 〜その１〜

根号を含む式の計算をしていると，結果が分数になることがしばしば生じます。たとえば計算の結果が $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ となったとしましょう。これはこのままでも間違いではありませんが，根号の中が分数になっているので，単純ではないし，あまり美しくありません。根号の中はできるだけ簡単な形になっている方が計算がしやすいし，いろいろと応用するとき扱いやすいことが多いのです。ではどのように変形すればよいのでしょう。

前節で紹介した公式，

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

を逆に使いましょう。すると，

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

となります。これで根号の中が整数になり，少し簡単な形になりました。しかし，分母と分子の両方に根号のついた数があります。これはなんとかならないでしょうか？　それはこうすればいいでしょう。

$\sqrt{a}$ はどのような数だったでしょうか？　「２乗すると a になる正の数」でした。よって分母が $(\sqrt{3})^2$ になれば，分母の根号がはずれます。分母だけ $(\sqrt{3})^2$ にすると元の $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ には等しくなりません。$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ に等しくするには，分母と分子の両方に $\sqrt{3}$ をかければいいですね。

以上を式で書けば,

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

よって最終的な結果として $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ を得ます。

最後に得られた式には，分子にしか根号のついた数がない，非常に単純な形となりました。

このように，分母と分子の両方に根号のついた数は，分母に根号のつかない形に変形することができます。

このように変形することを **分母を有理化する** といいます。 **分母の有理化**

例 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}\\ &= \frac{\sqrt{12}}{6}\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{6}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ と変形することで約分できる所に注意してください。

(2)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\\ &= \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{6}\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

(2) は，$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ と変形してから計算をはじめた方が少し楽かもしれません。$2\sqrt{2}\times\sqrt{6} = 2\sqrt{12}$ ですが，$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ を使って $4\sqrt{3}$ まで一気に変形しています。 **(例終)**

練習 41 次の数の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (2) $\dfrac{8}{3\sqrt{6}}$ (3) $\dfrac{\sqrt{10}}{3\sqrt{5}}$ (4) $\dfrac{5\sqrt{28}}{6\sqrt{75}}$

3.4.3　根号を含んだ式の計算

和・差

以上の準備のもとに，根号を含む式の計算方法を説明しましょう。

ここまでに説明した方法を使うことで，根号をはずしたり，根号の中を簡単にしたりすることができるようになったと思います。根号を含む式の計算では，まずできるだけ式を簡単にすることからはじめます。そうすると，たとえば $2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ のような式となります。

文字式の計算で $2a-2b+a+3b=3a+b$ と同類項をまとめたように，$2\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}$ を同類項とみなし，$-2\sqrt{3}$ と $3\sqrt{3}$ を同類項とみなすことで $2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+3\sqrt{3}=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ というように計算します。

文字式の計算をしたときに $3a+b$ がこれ以上簡単にならなかったのと同様に，$3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ をこれ以上簡単にすることはできません。

例　(1)　$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

(2)　$\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{6}\sqrt{3}$

(3)　$4\sqrt{5}-2\sqrt{3}-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$　**(例終)**

練習 42 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{3}$　(2) $2\sqrt{7}+\sqrt{7}-3\sqrt{7}$　(3) $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}$

例題 13 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{27}+\sqrt{12}$　(2) $\sqrt{2}+\frac{4}{\sqrt{2}}$

解説　この節の冒頭で触れましたように，(1) の式のような場合，まず根号の中を簡単にします。また分母は有理化してから計算します。

解答例　(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{27}+\sqrt{12} &= 3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\\ &= 5\sqrt{3}\ \cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sqrt{2}+\frac{4}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}}{2}\\ &= \sqrt{2}+2\sqrt{2}\\ &= 3\sqrt{2}\ \cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(解答例終)

練習 43 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{8}-\sqrt{18}$　(2) $2\sqrt{3}+\sqrt{108}-\sqrt{27}$　(3) $\dfrac{\sqrt{40}}{2}-\dfrac{\sqrt{90}}{3}+\sqrt{250}$

(4) $\sqrt{28}+\sqrt{112}-2\sqrt{7}$　(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$

積

再びかけ算についてです。今度は少し複雑なものですが，その計算方法は文字式の場合の展開と同様です。具体的には次のようにやります。

例　(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(\sqrt{3}+2) &= (\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\times 2\\ &= 3+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-2) &= \sqrt{2}\times\sqrt{5}-2\sqrt{2}+\sqrt{5}-2\\ &= \sqrt{10}-2\sqrt{2}+\sqrt{5}-2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\\ &= 2-2\sqrt{6}+3\\ &= 5-2\sqrt{6}\end{aligned}$$

(例終)

文字式の計算と同様に分配法則を用いて展開し，さらに $(\sqrt{a})^2=a,\ \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ などを使って変形していくということです。整式の計算でやった，展開の工夫などを思い出してください。

練習 44 次の式を計算せよ。

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$　(2) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$

(3) $(1-\sqrt{2})^3$　(4) $(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{6})$

商 —— 分母の有理化　その２

続いて割り算をやりましょう。これはこの節の題名にあるように，分母を有理化することと関係します。例を使って説明しましょう。

例　$1\div\sqrt{2}$

まず $1 \div \sqrt{2}$ です。割り算は分数の形に直す，という文字式を書くときの約束に従えば $1 \div \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となります。割り算の計算だけならこれ以上なすことはありません。その場合でも分母は有理化しておきます。 **(例終)**

ということは，これ以上話すことがないのかというとそうでもありません。上に挙げた例は単純なものなのです。今少し複雑な例を挙げましょう。

例 $2 \div (2+\sqrt{2})$

先と同じように分数に直すと

$$2 \div (2+\sqrt{2}) = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

となります。しかし分母に根号を含んだ式になっていて，なんとも見苦しい形です。これは簡単にすることができないのでしょうか？

実はできます。次のようにするのです。

$$\begin{aligned} 2 \div (2+\sqrt{2}) &= \frac{2}{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2 \times (2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\ &= \frac{2 \times (2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{2 \times (2-\sqrt{2})}{2} \\ &= 2-\sqrt{2} \end{aligned}$$

いったい何をやったのか，式の変形を追いかけるだけで理解できるでしょうか？

分母が $2+\sqrt{2}$ であることと，$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ という展開公式があったことに注目し，分母と分子に $2-\sqrt{2}$ をかけたのです。

分母が根号のついた数 $\sqrt{a}$ だけでないので，このような変形をしたのでした。

この問題の場合，分母がまったくなくなってしまいました。つまりみかけは分数だったのに，実はそうではなかったのです。しかしいつでもこのように簡単になるとは限りません。念のため。 **(例終)**

さて少し練習してもらいましょう。

練習 45 次の計算をせよ。

(1) $2 \div (2-\sqrt{2})$ (2) $2 \div (\sqrt{6}+\sqrt{3})$ (3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \div (\sqrt{5}-\sqrt{3})$

3.5　2 の平方根が有理数にならないこと

この節では，$\sqrt{2}$ が有理数ではないことを証明しましょう。もし証明に興味がなければ，定理と定義だけを読んで，先へ進んでもかまいません。しかし数学に興味のある人，将来より高度な数学を必要とする人はぜひチャレンジしてみてください。

$\sqrt{2}$ が有理数にならないことの証明には，少し準備が必要です。まず次の定理を証明しましょう。

定理 (n が偶数である条件)　n が偶数ならば，n^2 も偶数である。
逆に n^2 が偶数ならば，n は偶数である。

$\sqrt{2}$ が有理数にならないことの証明には，この定理の後半「n^2 が偶数ならば，n は偶数である」が使われます。

証明　さて，まず n が偶数であるとしよう。このとき整数 k を使って $n = 2k$ と表わすことができる。実際 n を 2 で割ったときの商を k ，余りを r とすると

$$n = 2k + r$$

と表わすことができるが，今 n は偶数だから 2 で割り切れる，つまり $r = 0$ 。よって $n = 2k$ と表わすことができる[6]。
するると
$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$
k は整数だから $2k^2$ も整数である。ゆえに n^2 が $2\times$（整数）の形になったので，n^2 は偶数である。
続いて逆に n^2 が偶数だとする。このとき n は偶数であるか奇数であるかのいずれかである（先の脚注参照）。仮に n が奇数である，つまり $n = 2k + 1$ （ただし k は整数）と

---

[6] ここで
整数 a を整数 b で割ったときの商を q ，余りを r とするとき

$$a = bq + r \quad \text{ただし } 0 \leqq r < b$$

という除法の原理を使っています。
とくに言及していませんが，本文の場合，r は 0 か 1 です。
$r = 0$ つまり $n = 2k$ と表わされるとき n は偶数であり，$r = 1$ つまり $n = 2k + 1$ と表わされるとき n は奇数です（もちろん k は整数です）。
またこのことから，どんな整数も偶数か奇数かのいずれかになります。

表わされるとしよう[7]。このとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 2(2k^2+2k)+1 \end{aligned}$$

ここで k が整数なので $2k^2+2k$ は整数になる。よって n^2 は奇数になる。しかしもともと n^2 は偶数であるとしてこの議論を始めたのであって，今得られた結果,「n^2 は奇数である」ということと矛盾している。この矛盾は「仮に n を奇数としてみよう」としたことから出てきたと考えられる。

よって n は奇数になりえない。つまり n は偶数である。 **(証明終)**

どうでしょう。納得できたでしょうか？

これで $\sqrt{2}$ が有理数にならないことを証明する理論的な準備ができました。

しかし，ある数が有理数であるとはどういうことでしょう。

定義 (有理数) $n,\ m$ を整数で $m \neq 0$ とする。このとき,

$$\frac{n}{m}$$

の形に表わされる数を **有理数** という。また分母が 1 でない有理数を **分数** という。 **有理数** **分数**

(定義終)

以上ですべての準備が整いました。次の定理を証明しましょう。

定理 ($\sqrt{2}$ が無理数であること) $\sqrt{2}$ は有理数ではない。

証明 $\sqrt{2}$ は有理数であるか，有理数でないかのいずれかである。我々は $\sqrt{2}$ が有理数でないことを証明したい。そこで仮に $\sqrt{2}$ が有理数であったとしよう。このように仮定して議論をし，矛盾を導く。

さて今 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定したので，整数 n,m を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

と表わすことができる。ここで $\dfrac{n}{m}$ はこれ以上約分できない形であるとしてよい（このことが後で効いてくる)。

分母を払うと

$$n = \sqrt{2}m$$

[7]ここから先で使われる議論の方法は **背理法**（はいりほう）と呼ばれる証明方法です。慣れないうちは何をやっているかよく分からないかもしれませんが，じっくり読んで理解してください。

簡単に説明するならば，背理法というのは，結論が A か B の二つしかなく，B であるということを証明したいときに，結論が A であるとすると論理的におかしなこと，矛盾（むじゅん）が起きることを示し，間接的に B であることを示す証明方法です（今の場合 A が「n は奇数である」，B が「n は偶数である」ことに相当します)。(「矛盾」という言葉の意味を知らない人は，必ず辞書をひくこと !!)

両辺を２乗すると，

$$n^2 = 2m^2 \qquad \cdots\cdots（1）$$

m は整数なので，当然 m^2 も整数。よってこの式から n は２乗すると偶数になる整数であることが分かる。

すると準備として証明した定理の後半を使うことで，n が偶数であると結論できる。ゆえに

$$n = 2k$$

と表わすことができる。

これを上の（1）の式に代入すると，

$$4k^2 = 2m^2$$

ゆえに

$$m^2 = 2k^2$$

先と同じ論法を使うと，m が偶数であることが分かる。

以上から n も m も偶数であることが結論される。ということは，$\dfrac{n}{m}$ の分母，分子ともに偶数であるから，２で約分することができる。しかし上に注意したように，$\dfrac{n}{m}$ はこれ以上約分できない形になっているとして議論をはじめた。これは矛盾である。

この矛盾はどこから生まれたのかを検討すれば，$\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定以外に原因はない。よって $\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定が誤り，つまり $\sqrt{2}$ は有理数ではないのである。 **(証明終)**

こういった証明は長く入り組んでいるので，一度読んだだけでは理解できないことでしょう。繰り返し読んで，理解と納得を深めていってください。

3.6　有理数と無理数 ―― 実数 ――

$\sqrt{2}$ が有理数でないことを，先の節で証明しました。言い換えると有理数でない数が存在することが，判明したわけです。そこでこれらの数に名を与えましょう。

定義 (無理数，実数)　有理数でない数を **無理数** という。 **無理数**

また有理数と無理数を合わせて **実数** という。 **(定義終)** **実数**

この言葉を使うなら，

$$\sqrt{2}\ \text{は無理数である}$$

ということができます。

ところで多くの読者諸君は，それとは知らされずに，$\sqrt{2}$ を知る前に，実はすでに無理数にであっています。それは小学校以来お馴染みの円周率πです。

πが無理数であることの証明は今はできません。しかしπが無理数であるという事実は覚えておいてください。

さて $\sqrt{2}$ が無理数であることが分かりましたが，これ以外の根号のついた数，たとえば $\sqrt{3}$ や $\sqrt{4}$ はどうでしょう。$\sqrt{4}=2$ ですから $\sqrt{4}$ は無理数ではありません。しかし $\sqrt{3}$ が無理数であることは，$\sqrt{2}$ の場合と同じように証明することができます（少し難しいが，練習問題として考えてみてほしい）。

そして同様の方法で $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\cdots$ が無理数であることが証明できます。よって無数の無理数が存在することがわかります。

このように無数に無理数が存在します。次の章では，実数の性質について，まとめましょう。

3.7　さらに勉強するために

$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明はどうだったでしょう？　理解できたでしょうか？

そこで用いられた背理法という証明方法は，今後何度も現れることでしょう。ぜひ自分のものとしておいてください。

本章では，主として平方根についての話に終始し，実数については最後にごくわずか触れたにすぎません。ここでは分数で表わすことができない数が存在するんだ，ということを脳裏（のうり）に刻んでおいてもらい，基本的な計算ができるようになっていてくれれば十分です。