第4章　実数の性質

4.0　はじめに

本章では，教科書などではごく簡単にしか触れられることがない，数に対する見方の変遷（へんせん）をいくぶん詳しく解説してみました。

こういったことは，授業でもあまり詳しく説明する時間が取れないので，なぜこういった数を考えるのかを，きちんと捉えることがなかなか難しくなっています。教科書の今のような扱いによって，確かに色々な計算はできるようになるかもしれませんが，数学というものの裏側にある考え方，必然性が軽視されていて，生徒諸君には理解し難くなっているように感じるのです。この章は，そういったギャップを埋めることを目標としています。

その内容は，自然数からはじめ，整数，有理数，実数までを，なぜそのような数を考えるのかという見方から整理してあります。そして実は実数まで考えても数学的には不十分なこと，それを完全にする複素数については，将来出会うであろうということだけを示唆しました。

ここに書かれているようなことを背景に，もう一度数について考えを巡らせてみてください。

実数に関する理論は，今世紀初頭にようやくまとめられました。その間2000年以上，一つには厳密な構成がなかなか必要にならなかったということもありますが，数学者にとっても，実数をどのように捉えたらよいのかということは難しかったのでしょう。大学へいって実数論を勉強すればよくわかりますが，その構成は大変に複雑なものです（もちろんそれによって，実数の本質がはっきりと浮き彫りになります)。

それほど，高度なものを含んでいます。よって多くの定理の証明を省略しました。どうしてもそれらを知りたければ，最後の節で紹介した書籍を参照してください。しかしそれらは，数学を専門に勉強しようという人を対象に書かれているので，それなりの覚悟をもって取り組む必要があります。

それほど証明に興味のない人は,「こういったことが成り立つのか，証明はついていないところをみると，結構難しいところなんだな」という程度に読み流し，結果を信用してくださればそれで結構です。

本章には二つの補講があります。

補講 9 では，分数が有限小数あるいは循環小数となることの証明を与えてい

ます。
補講 10 では，平方根は二つしかないことを証明しています。

4.1　自然数

我々が一番最初に出会った数，それは自然数でした。

自然数（natural numbers）というのは， **自然数**

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\cdots$$

と続く一連の数のことをいいます。

小学校のときには「整数」と呼んでいたかもしれません。それはそれで間違いないのですが，ここでは次に触れる負の整数と 0 をあわせて整数と呼ぶことにし，正の整数を特に自然数ということにします。

4.2　整　数

自然数に対して，その負の数を新しい数として考えた

$$\cdots,\quad -3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots$$

を **整数**（integral numbers あるいは integers）といいます。特に **整数**

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots$$

を正の整数（先に紹介した言葉を使うなら自然数）といい，

$$\cdots,\quad -3,\quad -2,\quad -1$$

を負の整数といいました。そして 0 は正でも負でもない数であるとしました（第 1 章「整数の性質」参照)。

自然数が整数の一部分として含まれていることに，ちょっと心を留めておいてください。

4.3　有理数（分数）

4.3.1　有理数の定義

次は分数です。先の章で定義を与えていますが，復習を兼ねてもう一度書きます。

定義 (有理数，分数)　$m,\ n$ （ただし $m \neq 0$ ）を整数とするとき

$$\frac{n}{m}$$

と表わすことのできる数を **有理数**（rational numbers）という。 **有理数**
特に $m \neq 1$ のとき **分数** という。 **(定義終)** **分数**

上の定義に従うと，整数は有理数であるということもできます。実際，たとえば3は

$$3 = \frac{3}{1}$$

と表わすことができるので，有理数です。言い換えると，整数は有理数の一部分であるといえるわけです。

有理数という言葉を紹介したのは，これをいいたかったからなのでした。別の言い方をするなら，我々は自然数から整数，そして有理数と考えている数の範囲を広げてきた，ということができるわけです。

この「数の範囲を広げる」という考え方が，このあとの主要なテーマです。

4.3.2　加減乗除が自由自在

ところで，上に触れたように我々は，数の範囲を有理数まで広げたのですが，なんでこんなことをしたのでしょうか？　それはみなさんが一生懸命練習してきた数の計算と深い関係があります。ここではそれを説明しましょう。

小学校で初めて習った数は自然数でした。そして自然数の足し算や引き算，かけ算，割り算といった計算のやり方を勉強しました。しかし自然数同士の計算で，結果が「常に」自然数になるのは足し算とかけ算しかないことに気がついていたでしょうか？

それに対して自然数同士の引き算は，たとえば

$$3 - 5 = -2$$

のように，負の整数になることがあり,「常に」自然数になるとは限りません。また割り算も

$$5 \div 3 = \frac{5}{3}$$

で，分数となり，自然数ではありません。

しかし数の範囲が整数まで広がると，今度は整数同士の引き算は必ず整数となります（整数同士の足し算やかけ算が，やはり整数になるのは変わりがない)。

さらに数の範囲を有理数まで広げると，有理数同士の割り算も必ず有理数になり，足し算，引き算，かけ算，割り算が自由にできるようになります。

このように数の範囲を有理数まで広げると，足し算，引き算，かけ算，割り算[1]が自由にできるようになるわけです[2]。

[1]いちいち四つをあげるのは面倒ですから，これから後ではこれらをあわせて **四則計算** とか四則，あるいは **加減乗除** ということにしましょう。
中学校で習ったように足し算を加法，引き算を減法，かけ算を乗法，割り算を除法といいます。加減乗除という言葉は，これらから一字ずつとったものです。

[2]厳密にいうと——実はこれまでのこともそうですが——証明する必要があります。

というわけで，この節のはじめにあげた問いに対する答えは，四則計算を自由にやりたいがために数の範囲を広げてきた，となります。

4.3.3 小学校で学んだ割り算２種

先の節を読んでいて

> 「ちょっと待ってください，私たちが習った割り算は上で触れられたものだけでなくて，商や余りを答えるようなものもありましたよ。
> それに商や余りは整数ですから，結果は常に整数ですよ」

という人がいるかもしれませんね。

大変鋭い指摘です。確かにそのとおりです。

実は整数の割り算は２種類あったわけで，商や余り出す計算を割り算と考える立場もあります。そして，いずれの割り算を採用するかで，数学の様相がまるっきり変わってきます。

商や余りを出す立場をとった数学の理論のごく初歩の部分を第１章「整数の性質」で扱いました。そこで，ここではもう一方の立場，割り算の答えを分数で出す立場で話を進めることにしましょう。

4.4 実　数

計算方法として加減乗除の四つを考えるだけなら，有理数までの範囲で十分なのですが，ピタゴラス学派の人達は次のような事実を発見しました。

彼らの見つけた図形に関する有名な結果に

定理 (ピタゴラスの定理)　直角三角形の斜辺の長さを c，残りの二辺の長さをそれぞれ a, b とするとき，

$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立つ。

という **ピタゴラスの定理**（中学校では **三平方の定理**と呼んでいたと思います。しかし私はピタゴラスに敬意を表し，このように呼びたいと思います）があります。

ピタゴラスの定理
三平方の定理

この定理を $a=1,\ b=1$ の場合，つまり直角を挟(はさ)む２辺の長さが１の直角二等辺三角形のときを考えると，斜辺の長さである c について

$$c^2=2$$

となります。そして彼らは，このような式を満たす数は有理数でないことを発見したのでした[3]。

[3] この証明は前章で述べた通りです。

彼らは困惑しました。なぜなら直角を挟む２辺が１の直角三角形は簡単に作図をすることができ，斜辺はある長さをもった線分です。そして彼らは，実在するものと数とが必ず対応しており，数とは有理数であると考えていたからでした。つまり図形として実際にそこにある以上，彼らは

$$c^2 = 2$$

を満たす「数」があると，認めざるを得ないのです。

我々は小・中学校を通じて，数を直線の上に表わすことを学んできました。この考え方を前提にするなら，ある直角三角形の斜辺の長さとして現れる

$$c^2 = 2$$

を満たす「数」が，実際に存在すると考えるのが理屈というものです。しかし我々はこの「数」を表わす方法を知りません。そこで新しい記号を発明し，上の式を満たす数を

$$\sqrt{2}$$

と表わすことにしたのでした。

というわけで，有理数だけでは十分でなく，まだ数の範囲を広げなければいけないことが明らかとなりました。

$\sqrt{2}$ のように，有理数でない数を **無理数**（irrational numbers）と呼び，有理数と無理数をあわせて **実数**（real numbers）というのでした。 **無理数** **実数**

大切なことは，実数まで数の範囲を広げても加減乗除は自由自在にできることで，これは有理数のときと変わりありません[4]。

4.5 方程式と数

先の節までは，数の範囲を四則計算との関係から見ていきました。ここではもう少し違う視点から説明しましょう。まず私たちは自然数しか知らないものとしましょう。

4.5.1 １次方程式と有理数

中学１年生のとき，方程式を習いました。非常に単純な方程式ですが，

$$5 + x = 3$$

また，前章の冒頭では，ピタゴラスの定理を用いないで $c^2 = 2$ という式を導きました。ここでは，歴史に沿ったお話をしています。

[4] この証明は大変難しい。知りたい人はたとえば
高木貞治著「解析概論」，岩波書店，附録 I 「無理数論」，p.457〜467
をみてください。

を考えましょう。この方程式は「５に何かを足したら３になりました。何を足しましたか，足したものを求めなさい」という問題です。

で，今我々は自然数，つまり正の整数しか知らないということになっているので，そのような数を見つけることができません。

実際この方程式を解こうとして，左辺の５を移項すると

$$x = 3 - 5$$

となりますが，$3-5$ は負の数になり，自然数の範囲で計算することはできません。これを

方程式 $5+x=3$ は自然数の解を持たない

ということにしましょう。

しかし数の範囲を整数まで広げると先の方程式は解けて，

$$x = -2$$

という解を持ちます。

これは

方程式は数の範囲によって解けたり解けなかったりする

ということを示しています。

$5+x=3$ という方程式は，非常に単純な形をした１次方程式です。しかし，自然数の範囲では解くことができないのです。

では整数の範囲まで数を広げると，どんな１次方程式でも解くことができるようになるでしょうか？　残念ながらそうはいきません。

たとえば方程式

$$3x = 5$$

はどうでしょう。

これを解くには両辺を３で割ればいいのですが，$5 \div 3$ は整数ではなく分数です。つまり方程式 $3x=5$ は整数の解を持ちません。しかし数の範囲を有理数まで広げると，この方程式は解けて，解を持ちます。

ここでさっきと同じ問いを考えましょう。つまり，数の範囲が有理数ならどんな１次方程式も解くことができるでしょうか。今度の答えは yes になります。

実際，どんな１次方程式も整理すると

$$ax + b = 0$$

の形に変形することができます[5]。ここで $a,\ b$ は有理数であるとしましょう。これを解くと，

$$x = -\frac{b}{a}$$

[5]中学校のとき，たとえば

$$\frac{2x+3}{2} - \frac{x-2}{3} = 5$$

のようなかなり複雑な形の方程式を解く練習をしたと思います。しかしどんなに複雑な１次方程式

となります。ここで右辺は有理数の割り算になっています。が，有理数を割り算した結果はやはり有理数ですから，もとの方程式は有理数の解を持つことが結論できます。

つまり

１次方程式 $ax + b = 0$ （$a \neq 0$，$a,\ b$ は有理数）は有理数の解を持つ

このようにして，１次方程式を解くには有理数の範囲で考えれば十分であることがはっきりしました。

4.5.2　２次方程式と実数

さて次にみなさんが出会った方程式は，２次方程式でした。このタイプの方程式は，整理すると最終的には

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{ただし } a \neq 0)$$

という形に変形できるものをいいます。

さきほどと同じように，有理数の範囲でこの方程式が常に解を持つかどうかを考えましょう。するとだめなことがすぐに分かります。

実際，先にピタゴラス達が発見したように

$$c^2 = 2$$

を満たす有理数はありません。このことは，方程式

$$x^2 - 2 = 0$$

が有理数の解を持たないということを示しています。

というわけで，２次方程式は常に有理数の範囲に解を持つとは限らないことが分かります。

では数の範囲を実数まで広げたらどうでしょう。ここまで範囲を広げると，確かに上のような方程式は解を持ちます。しかし

$$x^2 + 1 = 0$$

という方程式は解を持ちません。この方程式が実数の範囲に解を持たないことは，どんな実数も２乗すると０以上であるという事実から分かります。ここでは２次方程式を解くためには実数の範囲でも不十分で，もっと数の範囲を広げる必要があるんだ，ということだけを覚えておいてください。

も，必ず最後には $ax + b = 0$ の形になることは経験でよく知っていることでしょう。

もう少し正確にいうと，複雑な形をしていても，括弧をはずし，同類項をまとめるなどして，最終的に

$$ax + b = 0 \quad (\text{ただし } a \neq 0)$$

の形になる方程式を **１次方程式** というのです。

我々の目にみえる範囲の様々な現象を分析するには，実数の世界で考えればほぼ十分です。しかしもっと深く自然を研究していくと，$x^2+1=0$ を満たす数の必要性と有用性が理解できてきます。詳しいことは先にいって，必要になったところで説明することにいたします。

4.6 小数と実数

さてここまでで，私が意識的に避けてきたものが一つあります。それは小数です。

今までの話の中には，(小学校で習ってきたのにもかかわらず）小数のことが一度も出てきませんでした。ここではそのあたりのことを説明しましょう。

4.6.1 有理数と有限小数，循環小数

小学校のとき分数を小数に直したり，小数を分数に直したりする計算をやりました。たとえば

$$\frac{1}{4}=0.25$$

だし，

$$0.375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$$

です。また

$$\frac{1}{3}=0.33333\cdots$$

のように，割り切れずどこまでも続くようなものにも出会いました。

0.25 のようにどこかで必ず止まるような小数を **有限小数**，また $0.33333\cdots$ のようにどこまでも続く小数を **無限小数** と呼びます。 **有限小数** **無限小数**

さてここでちょっといくつかの計算をしてもらいましょう。次の分数を小数に直してみてください。

(1) $\frac{38}{111}$　　(2) $\frac{1}{7}$　　(3) $\frac{53}{165}$

いずれも無限小数となりますが，がんばって小数第 10 位ぐらいまで計算してください（電卓が手元にある人は使ってもかまいませんよ)。

さてこれら 3 つの分数を小数であらわそうとすると，いずれも無限に続く無限小数になります。しかしこれらに共通する現象があります。それは，いずれもあるところから同じ数字が繰り返し現れる，というものです。

このように，ある位から同じ数字が繰り返し現れるような小数を **循環（じゅんかん）小数** といいます。 **循環小数**

この言葉を使うと，

分数を小数に直すと有限小数か循環小数になる

ということができそうです。実際これは正しく，どんな分数も小数に直すと有限小数か循環小数になることが証明できます[6]。

逆に，どんな有限小数や循環小数も分数に直すことができるということも証明できます[7]。

ここまでのことをまとめると，

どんな分数も有限小数か循環小数で表わすことができ，
逆にどんな有限小数や循環小数も分数で表わすことができる,

となります。

このことは有限小数や循環小数と分数が同じものを表わしていて，言い換えると単に表わし方の違いにすぎないということを意味しています。

4.6.2　小数による実数の分類

では有限小数でもないし，循環小数でもないような小数はあるのでしょうか。実はあります。たとえば

$$0.101001000100001\cdots$$

（どんな規則によって０と１が並んでいるか分かりますか？）という小数は有限小数でも循環小数でもありません。つまり循環しない無限小数です。

---

[6] これを証明するには除法の原理を用います。この中で $0 \leqq r < b$ という条件が，今の場合鍵になります。

証明は補講で与えましょう。

[7] このことの厳密な証明は，今皆さんの持っている知識ではできません，ので認めてください。

厳密な証明にはならないし，ちょっと胡散(うさん)臭く感じられる部分もありますが，循環小数を分数に変形する方法を紹介しておきましょう。もう少し一般的な循環小数を分数に直す方法は，演習編で取り上げます。

たとえば，

$$x = 0.9999\cdots$$

は，両辺を 10 倍して

$$10x = 9.9999\cdots$$

下の式から上の式を辺々引くと

$$9x = 9$$

よって

$$x = 1$$

となります。

なんと $1 = 0.9999\cdots$ なのです !!　いぶかしく思う人がいるかもしれませんが，実数というものを深く考察していくと，この結果が間違いないことがはっきりと理解できます。その一端は——このシリーズの最後にくるであろう——微積分のところで，かいまみることができるでしょう。そのときまでのお楽しみとしておきます。

このような小数は分数で表わすことができるでしょうか？　先の節の説明からするとできないということが証明できます。

実際この小数が分数で表わせたとしましょう[8]。すると先の説明から，この分数を小数に直すとそれは有限小数か循環小数になります。しかし今考えている小数はそのいずれでもないので，これは矛盾です。ということは，上に挙げた小数は分数で表わすことができないのです。

さあここで前にピタゴラスたちが出会ったのと同様の状況が現れました。つまり，分数で表わすことのできない数に出会ったのです。

先の説明では，分数として表わすことのできない数を無理数と呼びました。ということは上の小数

$$0.101001000100001\cdots$$

は無理数を表わしていることが分かります。

先の節のまとめをもう一度使うと，次のことが分かります（説明は各自自分で考えてみるように)。つまり，

無理数を小数で表わすと循環しない無限小数になる。
また逆に，循環しない無限小数は有理数ではない，すなわち無理数である。

さて，先に有理数と無理数を合わせて実数という，と定めましたが，以上のことから次のように定めてもよい（厳密にいうと今の段階ではこの定義がベストなものです)。

定義 (実数)　小数で表わすことのできる数を **実数** という。　**(定義終)**　**実数**

4.7　無理数と小数展開

前節の最後で，小数で表わされる数を実数というと書きました。ではたとえば $\sqrt{2}$ は，小数で表わすことができるのでしょうか。ここまでの話からいえば，できなければなりません。具体的には次のようにします。

前章で紹介した定理に

定理 (平方根の大小)　$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ とする。このとき

$$a < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

というものがありました。

この定理によって

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

[8]この出だしからすると背理法のようだな。

であることが分かります（定理の後にある例も見直しておいてください）。

　ということは，$\sqrt{2}$ は 1 と 2 の間にある数であることが分かります。言い換えると

$$\sqrt{2} = 1.\cdots$$

です（今のところ $\cdots$ のところがどうなっているか不明です。それをこれから調べていこうとしているのです）。

　では小数第一位はどうでしょう。これは 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のいずれか，つまり $\sqrt{2}$ は $1.0\cdots$，$1.1\cdots$，$1.2\cdots$，$\cdots$，$1.9\cdots$ のいずれかになります。

$$(1.0)^2 = 1,\ (1.1)^2 = 1.21,\ \cdots,\ (1.4)^2 = 1.96,\ (1.5)^2 = 2.25$$

ですから，

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

であることが分かります。よって

$$\sqrt{2} = 1.4\cdots$$

です。

　以下これを繰り返すことにより，

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$$

であることが分かります。

　まあ，分かるといっても，上の最後の桁である 6 の次は 0 から 9 までのどの数字が現れるのか決まっていないので，あまり厳密なものではありません。またどの数字が現れるのか予想することもできません。しかし以上の計算方法から分かるように，原理的にはいくらでも正確に $\sqrt{2}$ の値を出していくことができることが理解できるでしょう。これを $\sqrt{2}$ の **小数展開**といいます。 **小数展開**

　最近の電卓には $\sqrt{\quad}$ 記号のついたボタンがあり，平方根が簡単に求められるものが多くなりました。しかし昔はそのように便利なものがなかったので，みな手で計算したものです。もっとも，必要になったときに自分で計算するのは余りにも効率が悪い。そこで小数点以下 4 桁くらいまでを計算し，表にしたものが作られていました。それを **平方根表** といいます。 **平方根表**

　これは教科書の巻末などに，たいていの場合ついています。今は電卓があるので，ほとんど無用のものとなってしまいました。

　問題によっては $\sqrt{2}$ などの値が，小数点以下何桁かで必要になります。入試問題などでは問題の中に与えられていることが多いので余り心配はありませんが，覚えられるなら覚えておいたほうがいろいろな場面で役に立ちます。下に三つほど並べておきますので，これらはできたら覚えてほしい。上のふりがなは，覚えるときの手がかりになると思います。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= \overset{\text{ひと}}{1}.\ \overset{\text{よ}}{4}\,\overset{\text{ひと}}{1}\,\overset{\text{よ}}{4}\,\overset{\text{に}}{2}\,\overset{\text{ひと}}{1}\,\overset{\text{み}}{3}\,\overset{\text{ご}}{5}\,\overset{\text{ろ}}{6}\cdots \\
\sqrt{3} &= \overset{\text{ひと}}{1}.\ \overset{\text{な}}{7}\,\overset{\text{み}}{3}\,\overset{\text{に}}{2}\,\overset{\text{お}}{0}\,\overset{\text{ご}}{5}\,\overset{\text{れ}}{0}\,\overset{\text{や}}{8}\cdots \\
\sqrt{5} &= \overset{\text{ふ}}{2}.\ \overset{\text{じ}}{2}\,\overset{\text{さん}}{3}\,\overset{\text{ろくに}}{6}\,\overset{\text{オーム}}{06}\,\overset{\text{な}}{7}\,\overset{\text{く}}{9}\cdots
\end{aligned}
$$

人によっては，平方根表はどうやって作ったのか，あるいは電卓の中ではどのようにして計算がされているのか，に興味があるかもしれません。上のようにこつこつとやっていけば，確かにいくらでも正確に計算ができるのですが，時間がかかります（たとえば $\sqrt{7}$ を小数展開してみよ）。実は比較的簡単に（特に計算機のように機械的に）小数展開を求める方法があります。それを今すぐに説明することはできません。準備が整ったらお話することにしましょう。

ここまでに説明したことをまとめると，下の図のようになります。

$$
\text{実数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{整　数}\begin{cases}
\text{正の整数 (自然数)}\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \\
0 \\
\text{負の整数}\ -1,\ -2,\ -3,\ \cdots
\end{cases} \\
\text{分　数}\ \dfrac{2}{3}\text{など}\begin{cases}
\text{有限小数} \\
\text{循環小数}
\end{cases}
\end{cases} \\
\text{無理数}\ \sqrt{2},\ \pi\text{など}\cdots\text{循環しない無限小数}
\end{cases}
$$

分母の有理化の意味　根号のついた数は，上のようにして小数に展開することができます。このことと，分母の有理化を組み合わせると，もう少しいろいろな数の小数展開を求めることができます。たとえば

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

でしたから，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1.41421356\cdots \div 2 = 0.707106\cdots$$

となります。

例題 14　$\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分はいくらか。

解説　整数部分とは，与えられた数を小数展開したときの整数の部分のことです。たとえば $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ なので $\sqrt{2}$ の整数部分は 1 です。

ところで，まずは分母を有理化しましょう。すると分子は $\sqrt{3}+1$ になり，$\sqrt{3} = 1.7\cdots$ でしたから，分子は $2.7\cdots$ になります。よってこれを 2 で割れば結論を得ます。

解答例

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{1.7\cdots+1}{2} = 1.\cdots$$

よって

$$\text{整数の部分は}\,1\,\cdots\ \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 46 $\sqrt{7}$ の小数部分を a とするとき，$a+\dfrac{1}{a}$ の値を求めよ。 (01 近畿大 (部分))

4.8 実数の性質のまとめ

以上，我々は数の範囲を実数まで広げてきました。そして高校数学のほとんどの内容は,（一部を除いて）ここを舞台に繰り広げられることになります。

その際，様々な場面であたりまえのこととして使う，いろいろな性質があります。こういった性質は，中学校までにも何度かあちこちに現れていましたが，順不同であり，必要になるたび，あるいは機会が生じるたびに，そのつど紹介されてきたものです。この節では，そういった性質をまとめておきましょう。

4.8.1 実数と四則計算

まずは実数と四則計算（加減乗除）です。

定理 (実数の性質１) 実数の範囲内で加減乗除の四則計算が自由にできる。ただし 0 で割ることは考えない。

これは本来証明すべきことですが，その証明にはたいへん手間がかかります。証明に興味のある人は,（理解するのはものすごく大変ですが）最後の節で紹介している高木先生の本を見てください (本節の証明のついていない他の定理についても同様)。

ところでなぜ「0 で割ることは考えない」のでしょうか[9]。これは説明しておき

[9] ここでは 0 で割ることしかいっていませんが，分数でいうと分母が 0 になること，つまり $\dfrac{a}{0}$ のような数は考えることができない，ということをも意味しています。今後はいずれも現れ，都合に応じて使い分けるので両方とも記憶しておいてください。

ちなみに 86 ページの脚注で，一次方程式とは $ax+b=0$, $(a \neq 0)$ なるものと定義しました。$a \neq 0$ という条件に注目してください。この条件があるので，一次方程式は解くことができるわけです。先の節で確認しておいてください。

こういったことは細かいことですが，今後は当たり前に配慮できるようになっていってください。

ましょう。そのために，まずは割り算とはどのような計算なのかを振り返っておく必要があります。

たとえば $6 \div 3$ という計算は何をやっているのでしょうか。小学校のはじめにおいてそれは,「6を三つに分けるとき，それぞれはいくつになりますか」，あるいは「6の中に3はいくつ入っていますか」という意味であったでしょう。

後者の意味でとらえると，0で割ること——たとえば $6 \div 0$ ——は「6の中に0はいくつ入っていますか」となります。しかしこれはどう答えたらよいのでしょう。実際，0はいくつ加えても6にはなりません。つまり答は求められないのです！

よって,「0で割ることは考えない」のです。

もう一つの見方があります。それは $a \div b = x$ を $b \times x = a$ と考える見方です。つまり,「a を b で割ったら x になりました」という文は「b に何か（x）をかけたら a になりました，何をかけたのでしょうか」と読み替えられる，というものです。すると0で割るということは $0 \times x = a$ となりますが，x が何であっても $0 \times x = 0$ ですから，a が0でない限り x を求めることはできません（実は $a = 0$ でもだめです。また，$0 \times x = 0$ は後で証明します)。

よって「0で割ることは考えない」のです[10]。

余談（よだん）ではありますが，後の方の考え方（つまり除法を乗法に直して考える方法）から,「除法は乗法の逆演算（えんざん）である」などといいます。 **逆演算**

逆演算という言い方は，何も乗法と除法にだけいえるものではありません。たとえば $a - b = x$ は $b + x = a$ を書き直せるので,「減法は加法の逆演算である」ということもできます。

このような考え方，言い方が今後何度か出てくると思います。頭の隅にでも入れておいてください。

また $a - b$ は $a + (-b)$ と考える，つまり

$$a - b = a + (-b)$$

と変形ができます。ここで $-b$ は b の符号を変えたものであると見ましょう。すると，減法は加法の一種であると考えることができます。負の数があるので，このような言い換えが可能になるわけです。もう少し極端な言い方をするなら，負の数を考えると引き算は不要になるともいえます。これが負の数を考えたメリットです。

同様に

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

と変形できるので，除法は乗法の一種であると考えることができます。これが分数を考えるメリットです。

[10]実は $0 \div 0$ は別に考える必要があります。どんなふうになるのか考えてみてほしい。もちろん結論は「0で割ることは考えない」となります。

定理 (実数の性質２－四則計算の性質)

（1） 二つの実数 a, b に対して，

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba$$

が成り立つ。これらをそれぞれ **加法の交換法則**，**乗法の交換法則** という。 **加法の交換法則** **乗法の交換法則**

（2） 三つの実数 a，b，c に対して，

$$(a+b)+c=a+(b+c), \qquad (ab)c=a(bc)$$

が成り立つ。これらをそれぞれ **加法の結合法則**，**乗法の結合法則** という。 **加法の結合法則** **乗法の結合法則**

（3） 実数 a に対して，

$$a+0=a, \qquad a\times 1=a$$

が成り立つ[11]。

（4） 実数 a に対して，

$$a+(-a)=0, \qquad a\times\frac{1}{a}=1 \quad (\text{ただし後者は } a\neq 0 \text{ の時に限る})$$

が成り立つ[12]。

（5） 三つの実数 a，b，c に対して，

$$a(b+c)=ab+ac$$

が成り立つ[13]。これを **分配法則** という。 **分配法則**

---

[11]加法の交換法則，乗法の交換法則が成り立つので，

$$0+a=a, \qquad 1\times a=a$$

も成り立っています。

実際

$$\begin{aligned}0+a &= a+0 \quad (\text{加法の交換法則を使った})\\ &= a \quad (\text{上の } a+0=a \text{ を使った})\end{aligned}$$

問 23 $1\times a=a$ を証明せよ。

[12]$a+(-b)=a-b$ でしたから，$a+(-a)=a-a$ ということです。

[13]乗法の交換法則が成り立っているので，先と同じように

$$(a+b)c=ac+bc$$

も成り立っています。

問 24 乗法の交換法則と上の分配法則 $a(b+c)=ab+ac$ を使って，$(a+b)c=ac+bc$ を証明せよ。

これらの性質を証明することは，高校の段階ではできません。よって受け入れることにします。

ところで，人によってはなぜこういったことを事々（ことごと）しく並べ立てるのかと思うかもしれません。確かに，ここにならべた性質は，皆さんには当たり前に成り立っているもののように感じられることでしょう。しかし上に書いたように，これらを実際に証明するとなると，大変です。また——これは大分先になりますが——，こういった性質の成り立たない数学の対象物があります。そういったものと出会ったとき，それまで当たり前と考えていたものが厳密に成り立っているかどうかをチェックしなければならなくなります。

もちろんこういったことは一生に一度チェックすればよい。しかし数学を使う以上，機会があれば必ずチェックをしておくべきことです。

またチェックすることによって，違うもののように見えていた対象物の類似点や，同じようにみえていた対象物の相違点がはっきりしてきます。そして，さらに詳しく，厳密に対象物を分析していくことができるようになるのです。

この一連のシリーズにおいては，可能なもの，高校生諸君に理解できそうなものにはできるだけ証明を与えていきたいと考えています。それゆえ，根拠となる，出発点となるものは何かをはっきりさせる必要がありました。この節の冒頭にも書きましたように，我々の話の主な舞台は実数の世界です。その土台をしっかりとさせるために，ここでまとめているのです。

さて，この定理の一つの応用を与えることと，証明に慣れてもらうことを兼ねて，次の性質を証明しましょう。

例題 15 実数 a に対して $0 \times a = 0$ を証明せよ。

解説　この問題は左辺を変形していくことで右辺を導くといった，今までのような方法は使えません。実は今一つ別の法則，等式の性質

等式の性質

$$a = b \quad \Longrightarrow \quad a - c = b - c$$

が必要になります。等式の性質については，後で方程式について扱うときにまとめて解説しようと思うので，ここでは信用して用いることにします。

さて,「実数の性質 2」の（3）より $0 + 0 = 0$ です。よって

$$(0 + 0) \times a = 0 \times a$$

ここで右辺に分配法則を使うと結局

$$0 \times a + 0 \times a = 0 \times a$$

後は両辺から $0 \times a$ を引けば結論を得ます。

解答例　$0+0=0$ より

$$(0+0)\times a=0\times a$$

分配法則を使うと

$$0\times a+0\times a=0\times a$$

両辺から $0\times a$ を引くと,

$$0\times a=0$$

を得る[14]。 **(解答例終)**

問 25 $(-1)a=-a$ を証明せよ。（ヒント：$1+(-1)=0$ を使え。）

問 26 $(-1)\times(-1)=1$ を証明せよ。（ヒント：これも $1+(-1)=0$ を使え。）

この節の最後に，実数と四則計算の性質の中でもっとも重要といえる性質を紹介しましょう。

定理 (方程式解法の原理)

(1) $ab=0$ ならば $a=0$ または $b=0$

あるいは同じことであるが,

(2) $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ ならば $ab\neq 0$

注意

(1) 「方程式解法の原理」という名前は私がつけたものです。よそでは意味が通じないかもしれないので，注意してください。 **方程式解法の原理**

名前の由来は，方程式（特に 2 次以上の方程式）を解くときにはっきりします。

(2) 「あるいは同じことであるが」というのは，後の章で説明する論理のことを知るまで理由が分からないでしょう。そこでの言葉を使うなら, (2) は (1) の「対偶」になっているので,「同値」なのです。 **対偶** **同値**

多くの生徒諸君を指導していて，これが理解できない人が多いので，念のため二つ挙げておきました。証明は（そんなに難しくはないのですが）論理の説明のところで与えることにしましょう。

(3) 実数のほかの性質と同様に，なぜこの性質を事々しく取り上げるのか理解できない人がいるかもしれません。先と同じく，実はこの性質の成り立たない数学的対象があるのです。それを「行列」といいます。これについてはかなり後で取り上げることになるでしょう。 **行列**

(注意終)

4.8.2 大小関係と四則計算

実数はもう一つ重要な性質を持っています。それは **大小関係** です。 **大小関係**

定理 (実数の性質３―大小関係) a を実数とするとき,

$$a > 0, \quad a = 0, \quad a < 0$$

のいずれか一つが必ず成り立つ。

定義 (正，負) $a > 0$ のとき a は **正**, $a < 0$ のとき a は **負** であるという。 **正**
(定義終) **負**

「大小関係」の定理は,「どんな実数も正か 0 か負のいずれかでなければならない」ということを主張しています。これが成り立つことは，明らかであるように感じるかもしれません。しかし実数とはどのような数なのかが明らかでないので,実数を定義した後で証明を要するし，証明が可能です。

さて，この定理から $a-b$ は正，0，負のいずれかなので，次のように定めることができます。

定義 (<，>) $a-b>0$, $a-b=0$, $a-b<0$ に応じて，$a>b$, $a=b$, $a<b$ と定める[15] [16]。

また $a>b$ または $a=b$ であるとき，$a \geqq b$，$a<b$ または $a=b$ であるとき,$a \leqq b$ と表わします[17]。 **(定義終)**

再び「大小関係」の定理によって，どんな実数もどちらが大きいかを必ず判定することができることが分かります。

次に大小関係と四則計算との関係を説明しましょう。

---

[14]「 $0 \times a$ 」を一つのものと見て，変形を行っていることに留意せよ。

[15] $a>b$ は「a は b より大きい」あるいは「b は a より小さい」と読みます。

[16] この定義を用いれば先の例題で用いた

$$a=b \implies a-c=b-c$$

が証明できます。

実際,

$$\begin{aligned}(a-c)-(b-c) &= a-c-b+c \\ &= a-b\end{aligned}$$

ですが，仮定より $a-b=0$ なので，結局 $(a-c)-(b-c)=0$ が言えたことになります。ゆえに $a-c=b-c$。

[17] $a \geqq b$ は「a は b 以上」，$a \leqq b$ は「a は b 以下」と読みます。

定理 (大小関係と四則計算)　$a > 0,\ b > 0$ ならば $a + b > 0, \quad ab > 0$

この証明は難しいので，触れません。これを使うと次の定理が証明できます。

定理 (不等式の性質)

（1） $a > b,\ b > c$ ならば $a > c$

（2） $a > b$ ならば $a + c > b + c, \quad a - c > b - c$

（3） $a > b,\ c > 0$ ならば $ac > bc, \quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

（4） $a > b,\ c < 0$ ならば $ac < bc, \quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

（5） $a > b,\ c > d$ ならば $a + c > b + d$

（6） $a \geqq b$ かつ $a \leqq b$ ならば $a = b$

それぞれの主張をよく見ておいてほしい。

（2）は「大小関係は数を加えても，減じても変わらない」,（3）,（4）は「正の数をかけても割っても大小関係は変わらないが，負の数をかけたり割ったりすると大小関係が入れ替わる」と解釈することができます。

「不等式の性質」の証明　（1）仮定 $a > b,\ b > c$ より $a - b > 0,\ b - c > 0$。「大小関係と四則計算」の定理より $(a - b) + (b - c) > 0$。左辺を整理すると $a - c > 0$ を得る。よって $a > c$。

（3） $a > b$ より $a - b > 0$。「大小関係と四則計算」の定理より $(a - b)c > 0$。左辺に分配法則を使って展開すると，$ac - bc > 0$。よって $ac > bc$。

また $\dfrac{1}{c}$ は正，0，負のいずれかである。$\dfrac{1}{c} = 0$ とすると，両辺に c をかけて $1 = 0$。これは矛盾。また $\dfrac{1}{c} < 0$ とすると，両辺に c をかけて $1 < 0$（$c > 0$ なので，直前に証明したことからこの結論を得る）。これも矛盾。よって $\dfrac{1}{c} > 0$ [18]。

さて，$\dfrac{a}{c} = a \times \dfrac{1}{c}$ であるから[19]，すぐ上に証明したかけ算についての性質から $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$ を得る。

(証明終)

問 27 $a > 0$ ならば $-a < 0$ が成り立つことを証明せよ。

問 28 上の定理の残りの部分を証明せよ。

---

[18] 今まででてきた背理法は，結論が A であるか，A でないかの二つでした。ここは A（$\dfrac{1}{c} = 0$），B（$\dfrac{1}{c} < 0$），C（$\dfrac{1}{c} > 0$）の三つの可能性があるタイプになっています。このようなときにも背理法が使えます。ただし，結論のうちの一つが必ず成り立つようなものでなければなりません。

このようなとき，二つの場合が成り立たないことを示すことで，残りが成り立つとするのがここでの背理法になっています。

[19] ここで割り算をかけ算とみなす見方が役に立っていることに注目してほしい。

大小関係の重要な性質として，次のものもありました。

定理 (実数の平方)　どんな数 a についても，$a^2 \geqq 0$。

証明は，第 3 章で与えてあります。

4.8.3　数直線

先の二つの節では，実数の代数的な性質[20]をまとめました。ここでは数を直線上の点と考える，幾何的な見方を紹介しましょう。

数直線という考え方には，すでに小学校や中学校で出会っています。ここでは復習を兼ねて，少し丁寧（ていねい）に見ていきましょう。

数直線を描くには，二つの基準になる点をまず定めなければなりません。一つを O（オー），もう一つを E としましょう。これらを数直線上にとるとき，二通りの取り方があります。

いずれの描き方をしても，理論的には問題はありません。しかし，いずれかに決めておかないと，人と話をするときに困ったことが起きる可能性があります。そこで，通常は左側の図のように，O を左側，E を右側に取るのが習慣になっています。そして O に数 0 を，E に数 1 を対応させます。

すると OE を単位として長さを測（はか）る[21] ことによって，直線上の点と実数が対応します。ただしこの際，O より右側にある点には正の数を，左側にある点には負の数を対応させると約束します。

---

[20]「代数」とは，「数の代わりに文字を使って計算する」というような意味です。それゆえ代数学とは，「数の代わりに文字を使った計算についての学問」という意味になります。これに対して図形的なもの研究する学問を「幾何（きか）学」といいます。

[21]「 OE を単位として長さを測る」という表現は，ちょっとわかりにくいかもしれません。今までは大抵 OE を 1cm でとるようにしていたであろうからです。しかし OE は 1cm でなくてもかまいませんよね。実際，長さの単位は cm 以外にも m やインチ，寸や尺——この二つは昔の日本（分野によっては今でも）で使われていた単位です——などいろいろあります。

そして長さを測るということは，cm なり m なり，何らかの単位を定め，その何倍になっているかを求めることです。

数学はそういった単位に依存しない部分を扱っていく分野であるため，このような書き方になるのです。

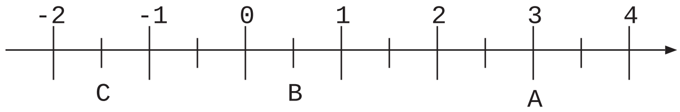
ここで重要なことは，実数を一つ選ぶとそれに対応する直線上の点が必ず一つ決まり，逆に直線上の点を一つ選ぶとそれに対応する実数が必ず一つ決まる，ということです。これを「直線上の点と実数が 1 対 1 に対応する」と表現します[22]。

定義 (座標，数直線，原点)　直線上の点 P に対応する実数 x を，点 P の **座標** といい，P(x) と表わす。座標を考えた直線を **数直線** という。 **座標** **数直線**

数直線上の基準となる二つの点のうち O を **原点**という。 **(定義終)** **原点**

練習 47 下の数直線上の点 A, B, C の座標をいえ。

また，座標 D(2.5), E(-2) を持つ点 D, E を書き入れよ。



このように，実数と直線上の点はうまい具合に対応します。このことは，数に関することを図形に関することへ，逆に図形に関することを数に関することへの翻訳（ほんやく）を可能にしてくれます。その一つの例を次の節で，もっと大掛かりなことを後の章で扱うことになります。

4.8.4 絶対値

実数に関する最後の話題は絶対値です。

まず定義しましょう。

定義 (実数の絶対値)　実数 a に対して，

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{ただし } a \geqq 0\ ) \\ -a & (\text{ただし } a < 0) \end{cases}$$

と定め，これを a の **絶対値** という。 **(定義終)** **絶対値**

注意

(1) 手書きをするとき，数字の 1 と混乱しないように，絶対値の記号である両側の縦線は少し長めに書くこと。

(2) 中学校のときは，原点 O と数 a の表わす点 A との距離を数 a の絶対値と定めました。これは絶対値の幾何的なイメージを与えてくれます。しかし式によって厳密に議論を展開しようとするときには，不便なものです。ここに挙げた定義が使いこなせるようになってください。

[22]「1 対 1 に対応する」という言い方は本来集合に関するものです。それをここでは流用しました。詳しくは後の章で説明します。

(3) 絶対値の右辺はどこかで見たような気がしないでしょうか？　そう，$\sqrt{a^2}$ の計算のところで出てきました。もう一度書くと，

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (\text{ただし } a \geqq 0\ ) \\ -a & (\text{ただし } a \text{ は負の数}) \end{cases}$$

でした。
よって次のことが成り立ちます。

定理 (絶対値と平方根の関係)　a を実数とするとき，

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

あるいは

$$|a|^2 = a^2$$

この定理は後で何度も使うことになるでしょう。

(注意終)

例

$$|3| = 3, \quad |-4| = 4, \quad |0| = 0$$

(例終)

定義にしたがって，上の式を納得してほしい。

練習 48 次の値を求めよ。

(1) $|-5|$　　(2) $|2.4|$　　(3) $\left|-\dfrac{3}{4}\right|$

例　今度は上と逆のことをやりましょう。$|x| = 2$ を満たす x を求めてみましょう。
「絶対値と平方根の関係」より，

$$\sqrt{x^2} = 2$$

両辺を二乗すると，

$$x^2 = 4$$

ゆえに

$$x = \pm 2$$

これはちょっと大袈裟(おおげさ)な感じがします。中学校流でやってみましょう。$|x| = 2$ ということは，数 x の表わす点は原点から 2 の距離にあるということです。このような点の座標は 2 と -2 です。 **(例終)**

この例を一般化することで次の定理を得ます。

定理 ($|x| = a$ の解)　$a \geqq 0$ であるとき，$|x| = a$ を満たす x は $\pm a$。

注意　$|x| = a$ は x に関する方程式と考えることができます。上の定理は「方程式 $|x| = a$ の解は $x = \pm a$ である」といっていることになります（ただし右辺は 0 以上であることに注意せよ。また $a < 0$ のときには「解なし」となる）。 **(注意終)**

例題 16 方程式 $|x - 2| = 3$ を解け。

解説　上の定理から

$$x - 2 = \pm 3$$

これは $x - 2 = 3$ と $x - 2 = -3$ の二つの方程式を同時に表わしたものです。これらのそれぞれを解くのは簡単です。解答例ではそれぞれを解くのは計算用紙など，答案外でやり，結果だけ書いていることに注意してほしい。

解答例

$$x - 2 = \pm 3$$

よって

$$x = 5,\ -1\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 49 次の方程式を解け。
(1) $|x + 3| = 5$　　(2) $|3x - 1| = 6$

絶対値の持つ性質をまとめておきましょう。

定理 (絶対値の性質)
（1）$|a| \geqq 0$
（1）$'$ $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$
（2）$|ab| = |a||b|$,　$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ ただし $b \neq 0$
（3）$|-a| = |a|$
（4）$|a + b| \leqq |a| + |b|$　（三角不等式）　**三角不等式**

証明　（2）

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} \\ &= |a||b| \end{aligned}$$

(証明終)

問 29 「絶対値の性質」の（4）以外の残りを証明せよ。

注意 （4）は等式ではありません !! これは間違えやすいのでかなり注意が必要です !!

また, (4）の証明は後の章で与えることにします。そのとき「三角不等式」という名前の由来も説明しましょう。 **(注意終)**

定義 (2 点間の距離) 数直線上の 2 点 A(a), B(b) に対してこれらの間の **距離** d を **距離**

$$d = |b - a|$$

と定める。 **(定義終)**

注意 AB 間の距離を $|b-a|$ と定めましたが，これは $|a-b|$ でも構いません。実際,「絶対値の性質」の（3）より

$$|a-b| = |-(a-b)| = |-a+b| = |b-a|$$

です。 **(注意終)**

例 A(2)，B(5) 間の距離 d は

$$d = |5-3| = |2| = 2$$

C(3)，D(-1) 間の距離 d' は

$$d' = |-1-3| = |-4| = 4$$

(例終)

練習 50 A(3)，B(9)，C(-3) について，距離 AB，BC，CA を求めよ。

4.9 さらに勉強するために

$\sqrt{2}$ が無理数であることは紀元前に知られていましたが，実数というものが理論的にきちんと整理されたのは，19 世紀の終わりから 20 世紀のはじめにかけてでした。これは実数というものを厳密に扱う必要が生じたからであり，それは（ずっと後で勉強することになる）微積分の拠(よ)ってたつ理論的根拠を与えます。 **微積分**

このように今世紀初頭まで数学者による厳密な扱いがなされなかったのは，実数というものの理論的な研究がそれだけ難しいものであったからであるともいえます。

よってまずは，我々は自然数，整数，有理数，実数と数の世界を広げてきたんだということが理解できていれば，本章を書いた甲斐があるというものです。

実数の厳密な扱いは

「解析概論」改訂第三版，高木貞治著，岩波書店（1961）　**解析概論**

の第１章と附録で扱われています。しかしこれは大変難しい。数学科へ進学するつもりのある人が，入学を前にした春休みくらいに取り組むのがよいでしょう（もちろん数学を専攻すると決心している人がもっと前に読むのは別に構いません)。しかしすぐに理解できないからといって，悲観する必要はありません。何度も読むうちに理解できるようになるからです(「読書百遍，意おのずから通ず」です)。

ついでながら高木先生の「解析概論」は長い間（今現在も），大学における微積分の教科書，あるいは参考書として読み継がれてきている名著です。この方面へ進もうと考えているものにとっては必携の書物です。

あるいは読み物として（は難しすぎるかもしれませんが），

「数について—連続性と数の本質」，

デーデキント著　河野伊三郎訳　岩波文庫（1961）

も挙げておきましょう。

著者であるデーデキントは，実数の厳密な理論を構築した中心的人物です。「集合」という考え方が必要となるので，すぐに読むことはできないかもしれませんが，少しずつ知識を増やしながら読んでいくといいでしょう。　**デーデキント**　**集合**

一方ここでは実数以前，つまり自然数や整数，有理数に関する性質はほとんど明らかなものとして扱いました。厳密にいうならこれらもきちんと反省し，証明しておく必要があります。しかしそれをやりだすと，それこそ一冊の本になるでしょう。実際本になっています（一冊ではありませんが)。

「数の体系」(上),(下)，彌永昌吉著　岩波新書

（上）青版 815（1972）,（下）黄版 43（1978）

この本は，自然数（ペアノの公理，これについては後で取り上げる機会もあるでしょう）からはじめ，実数までをくわしく構成して見せてくれます。　**ペアノの公理**

ただ，もしかしたら絶版になっていて手に入らないかもしれません。少し大きな図書館にはあるでしょう。同じ著者の本格的な作品として

岩波講座　基礎数学「集合と位相」，

彌永昌吉・彌永健一著　岩波書店（1976）

があります。

この本は——次の章で解説しようと思いますが——，集合に関する解説からはじまり，集合の考え方を使って自然数を構成し，以下実数までを再構成する，と

いう内容になっています。将来数学に進むつもりの人は，少なくとも斜め読みはしておくとよいでしょう。

高校生くらいが読むにはちょっとしんどいかもしれませんが，

「代数系入門」，松坂和夫著　岩波書店（1976）

も挙げておきましょう。この本は，現代的な数学への入門も兼ねたよい本です。学校の授業に飽き足らない感じのする人は，挑戦してみるといいですね。同じ著者の本に

「集合・位相入門」，松坂和夫著　岩波書店（1968）

もあります。これもよい本なので，興味のある人は「代数系入門」と並行して読むとよいでしょう。

実数について話したいことはまだまだたくさんあります。準備ができ次第，順にお話していくことにしたいと思います。