第5章　集　合

5.1　はじめに

ここまでの章で，中学校の復習およびその内容の整理をしてきました。ここからいよいよ，高校での数学に入っていきます。

その際，直接は表に出てくることは少ないものの，数学の土台として理論を支えている考え方の一つに『集合』があります。

この概念は19世紀終わりから20世紀初頭にかけて，カントルという数学者によって整理され，重要性が徐々に認識されてきたものです。そして今では集合の概念なしには数学を語ることができないほど，当たり前のものとして数学の理論の中に定着しています。ここではその基本的な部分を紹介し，皆さんに使いこなせるようになってもらおうと思っています。

数学は，できるだけたくさんの対象物に成り立つ性質を探求していく，というポリシーをもっています。それゆえ――たとえば個々の整数の持つ個性ともいうべき性質も興味深いのですが――様々なものに共通な現象を記述していきたいと考えます。そのとき，考察の対象となっているものの範囲がはっきりとしていなければいけません。

こういったことから，集合という考え方が生まれてきたのです。

本章では，集合に関する基本的な定義といくつかの性質を紹介します。部分集合，和集合，共通部分，補集合という考え方がベン図を用いて使いこなせるようになれれば，第一段階終了です。

補講11では，集合と集合の間の関係を記述する，写像という考え方を紹介します。この考え方は，最近の教科書ではほとんど解説されていません。かなり抽象的なので，じっくり取り組んでください。ここを読めば，論理の扱い方になれる必要性があることが実感できるでしょう。

5.2　集合とは

大雑把（おおざっぱ）に言うと，集合とは もの の集まりのことです。しかし何かものを考えたとき，それがその集まりに入っているかどうかがきちんと判断でき，またそれ

は，誰が判断しても同じ結果にならなければ意味がありません。

定義 (集合，要素，元)　それに含まれるかどうかがはっきりと判断できるようなものの集まりを **集合（set）** といい，集合に属する一つ一つのものを，その集合の **要素（element）** あるいは **元**(げん) という[1]。　**(定義終)**

集合
要素
元

例　「5 以下の自然数の集まり」は集合です。

1 はこの集合の要素であり，-3 はこの集合の要素ではありません（どんな数を自然数といったか第 4 章「実数の性質」で確認しておいてください）。

また「大きい数の集まり」は集合ではありません。実際，人によってどのような数を大きいと判断するか，違ってくるからです。　**(例終)**

練習 51 次の中で集合になっているのはどれか。また集合になっているものについては，その要素と，要素になっていないものを一つずつ挙げよ。

(1) 日本の都道府県所在地の集まり　(2) 背の高い男性の集まり
(3) 美しい花の集まり　(4) 7 で割り切れる整数の集まり

集合は A, B などの大文字で表わし，要素は a, b などの小文字で表わすのが習慣になっています。

定義 ($\in, \ni, \notin, \not\ni$)　a が集合 A の要素であるとき，

$$a \in A \quad \text{または} \quad A \ni a$$

と表わし,「a は A の要素である」あるいは「a は A に属する」と読む。

また b が集合 A の要素でないとき，

$$b \notin A \quad \text{または} \quad A \not\ni b$$

と表わし,「b は A の要素ではない」あるいは「b は A に属さない」と読む[2]。

(定義終)

例　5 以下の自然数の集合を A と表わすとき，

$$2 \in A, \quad -3 \notin A$$

(例終)

[1]最近はたいていの場合，要素というようですね。ちょっと古い文献を読むと元と書いているものもあります。私が習ったときには両方使われ，話す人の気分に応じて使い分けられていたように記憶しています。このシリーズでは要素に統一して使うことにしましょう。

[2]記号 $\in$ は exist（意味を調べよ！）の e から作られたと，教わった記憶があります。

そして「等しくない」は記号で $\neq$ で表わされるのと同様に，要素でないことを $\notin$ で表わします。

練習 52 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と表わすとき，次のことを記号 $\in$, $\notin$ を使って表わせ。

(1) -2 は $\mathbb{Z}$ の要素である。　　(2) $\dfrac{2}{5}$ は $\mathbb{Z}$ に属さない。

注意　今後，自然数，整数，有理数，実数の集合をよく扱います。そこで本書では，次のように記号を定めておきます。

$\mathbb{N}$：自然数の全体の集合
$\mathbb{Z}$：整数全体の集合
$\mathbb{Q}$：有理数全体の集合
$\mathbb{R}$：実数全体の集合

それゆえ，たとえば $x \in \mathbb{R}$ とあれば,「x は実数である」と読んでほしい。こういった記号を使うことによって，手早く様々なことが表現できるようになるので，使いこなせるように訓練してほしい。

また記号 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ は世界的に通用する書き方です。よって記憶しておくと便利です。 **(注意終)**

5.3 集合の表わし方

集合とは上に説明したようなもののことをいいますが，それをどうやって表現するのか説明しましょう。

例　たとえば,「5 以下の自然数の集合 A」を考えましょう。この条件を満たすものは 1, 2, 3, 4, 5 の五つであり，これ以外はこの集合の要素にはなり得ません。つまり 5 以下の自然数の集合は 1, 2, 3, 4, 5 の五つの要素で構成されています。そこでこれを

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

と書くことにします。

またたとえば,「自然数の集合 $\mathbb{N}$」は，1, 2, 3, $\cdots$ と，無数の要素から構成されていますが，これを

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

と書きます。

つまり，中かっこ $\{\}$ の間に，その集合を構成する要素を書き並べることで，その集合がどのような要素からなっているのかを表わすのです。 **(例終)**

練習 53 次の集合を，要素を書き並べることで表わせ。

(1) 九州地方の県名　　(2) 6 の約数

(3) 方程式 $3x + 4 = 10$ の解

例　要素の数がそんなに多くないときには，全部書き並べてもそんなに手間はかかりませんが，たとえば「100 以下の自然数の集合 B」や自然数の集合のようなものは，書くのにかなり手間がかかります（それどころか自然数の集合などは，要素を全部書ききることはできません)。このようなときには，次のように表わすこともあります。

$$\begin{aligned} B &= \{x|x \text{ は } 100 \text{ 以下の自然数}\} \\ \mathbb{N} &= \{n|n \text{ は自然数}\} \end{aligned}$$

つまり中かっこの間にまず $x|$ と書いて，その後にその集合の要素が満たすべき条件を書くわけです。 **(例終)**

注意

(1) $x|$ は「x ただし」と読みます。よってたとえば $\{x|x$ は 100 以下の自然数$\}$ は,「x ただし x は 100 以下の自然数」と読むことになります。

(2) 上の例で $\mathbb{N}$ は $\{n|n$ は自然数$\}$ と書いてあり，上の x に相当するところが n になっています。実は，この例のように，使う文字は何でも構いません。第 4 章「実数の性質」で触れたように，自然数を英語でいうと natural numbers です。それを表すのに n を使うことが多いので，ここではそれに沿った表し方を例示してみました。もっと自由な例がこの後出てくると思いますので，少しずつ慣れてください。

(3) 集合の要素が満たすべき条件をかく方法では，表わし方は一通りではなく，何通りもありえます。実際 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ という集合 A は

$$\begin{aligned} A &= \{x|x \text{ は } 5 \text{ 以下の自然数}\} \\ &= \{x|x \text{ は } 6 \text{ より小さい自然数}\} \\ &= \{x|1 \leqq x \leqq 5,\ x \text{ は整数}\} \end{aligned}$$

などと表わすことができます。
どの書き方をしても構いませんが，読む人がわかりやすい表し方をするべきでしょう。

(注意終)

練習 54 次の集合を条件を使って書き表せ。

(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$　　(2) $\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}$

すでに上の注意（3）で等号を使ってしまっているのですが，二つの集合が等しいことの定義は以下の通りです。この定義は自然でしょう。

定義 (集合の相等)　二つの集合 $A,\ B$ について，A を構成する要素と B を構成する要素が完全に一致するとき，二つの集合 A と B は **等しい**といい，　**等しい**

$$A = B$$

と表わす。 **(定義終)**

注意　以上のことから，たとえば「5 以下の自然数の集合」について $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ や $\{5,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4\}$ は等しくなります。つまり，集合は構成する要素をどのような順番で書いても構いません（もっとも読む人がわかりやすいように，整理して書くのが常識でしょう）。 **(注意終)**

次の定義はちょっと奇妙なものですが，これがあると議論がしやすくなります。

定義 (空集合)　要素を一つも持たないものも集合と考え，これを **空(くう)集合** といい， **空集合**

$$\phi$$

という記号で表わす。 **(定義終)**

注意
(1) 空集合は数の 0 に相当する集合と考えることができます。その理由は，以下で明らかになるでしょう。
(2) 空集合を強引に要素を書き並べる方法で表わすなら，

$$\{\quad\}$$

条件を使って表わすなら，たとえば，

$$\{x|x \in \mathbb{R}\ ,\ \ x^2 = -1\}$$

とでもなるでしょうか。後者の場合，矛盾する条件なら何でも構いません。
(注意終)

5.4　部分集合

以上で集合の表わし方は終わりで，ここから集合間の関係や集合に関する計算を解説しましょう。

まずは数の大小関係に相当するものとして，包含(ほうがん) 関係を定義します。

定義 (部分集合)　集合 A のすべての要素が集合 B に属しているとき，A は B の **部分集合（subset）** であるといい， **部分集合**

$$A \subset B \quad \text{あるいは} \quad B \supset A$$

と表わす。前者は「A は B に含まれる」，後者は「B は A を含む」と読む。
また，$A \subset B$ で $A \neq B$ であるとき，A は B の **真部分集合** であるという。 **真部分集合**
(定義終)

例　$A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ のとき，$A \subset B$ です。 **(例終)**

例　$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ **(例終)**

注意

(1) 部分集合というと，本当に一部分になっていると思い込みがちですが，定義を素直に適用すると，どんな集合 A に対しても $A \subset A$ になります。つまり，等しい場合も含んでいることに注意してください。

(2) **空集合はどんな集合の部分集合にもなっている** と約束する。つまりどんな集合 A に対しても $A \supset \phi$。

(注意終)

包含関係 $\subset$ は，数の大小関係 $\leqq$ と同じような性質を持っています（これは以下で説明します)。ただし，どんな二つの数 $a,\ b$ も $a < b,\ a = b,\ a > b$ のいずれかが必ず成り立った (第 4 章「実数の性質」参照）のに対して，集合の場合はいつでも比較できるとは限らないことにも注意してください。

例　$A = \{1,\ 2\},\ B = \{3,\ 4\}$ とするとき，A と B の間には包含関係はない。

(例終)

包含関係については，次の定理が成り立ちます。

定理 (相等)　集合 $A,\ B$ の間に

$$A \subset B \quad \text{かつ} \quad B \subset A$$

という関係があれば

$$A = B$$

証明　$A \subset B$ より，A の要素はすべて B に属している。

また $B \subset A$ より，B の要素もすべて A に属している。

つまり A と B は同じ要素で構成されている。つまり

$$A = B$$

である。 **(証明終)**

注意　これは「$a \leqq b,\ b \leqq a$ ならば $a = b$」の類似になっています。 **(注意終)**

次の定理も，包含関係 $\subset$ と大小関係 $\leqq$ との類似性を示しています。

定理 (推移律)　$A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$。

証明　$A \subset B$ より A の要素はすべて B に属しており，また $B \subset C$ より B の要素はすべて C に属している。よって A の要素はすべて C に属している。ゆえに

$$A \subset C$$

(証明終)

例題 17 次の集合の包含関係を調べよ。

$$\begin{array}{ll} A = \{x|x \text{ は四角形}\} & B = \{x|x \text{ は長方形}\} \\ C = \{x|x \text{ は正方形}\} & D = \{x|x \text{ は平行四辺形}\} \\ E = \{x|x \text{ はひし形}\} & F = \{x|x \text{ は台形}\} \end{array}$$

解説　体裁は集合についての問題ですが，本質は皆さんがきちんと図形の定義を記憶しているかどうかを問うものです。

それぞれの定義を，簡単に復習しておきましょう。以下を見る前に，自分なりにノートに書いてみるのもよいでしょう。

四角形：四つの辺からなる図形
台　形：相対する一組の辺が平行な四角形
平行四辺形：相対する二組の辺が平行な四角形
長方形：内角が直角である平行四辺形
ひし形：四辺の長さが等しい四角形
正方形：内角が直角であるひし形

この定義から，まず台形以下はすべて四角形です。また平行四辺形は台形の特別なものですし，長方形は平行四辺形の特別なもの，正方形はひし形の特別なものであることが分かります。

さらに次の定理があるので，ひし形は平行四辺形の特別なものです。

定理 (平行四辺形になるための条件)　相対する二組の辺がそれぞれ等しい四角形は，平行四辺形である。

また，B と E の間には包含関係はありません。

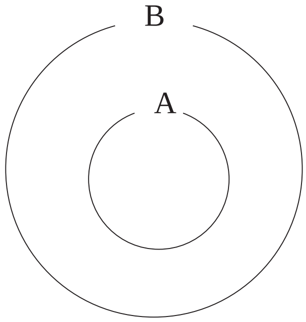
解答例

$$A \supset F \supset D \supset B \supset C, \quad A \supset F \supset D \supset E \supset C \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

5.5　ベン図

集合とは，ある条件を満たすものの集まりでした。しかし一々式で書くようでは，なかなかわかりにくい部分があります。そこで集合を表わすために図を用いると便利です。これを **ベン図（Venn）** といいます。 **ベン図**



たとえば集合 A が集合 B の部分集合であることは，上の図のように表わすことができます。欠点は，二つの集合が等しいことを表わせないことと，空集合は表わせないことで，ごくまれにですが，不便を感じることがあります。今後集合に関係する話をするときにはよく出てくるので，使いこなせるようになっておいてください。

5.6　和集合と共通部分

それでは，集合に関する計算をやっていきましょう。まずは 和集合から。

定義 (和集合，結び)　二つの集合 $A,\ B$ に関して A と B の要素をすべて合わせた集合を，A と B の **和集合** または **結び** といい， **和集合** **結び**

$$A \cup B$$

と表わす[3]。 **(定義終)**

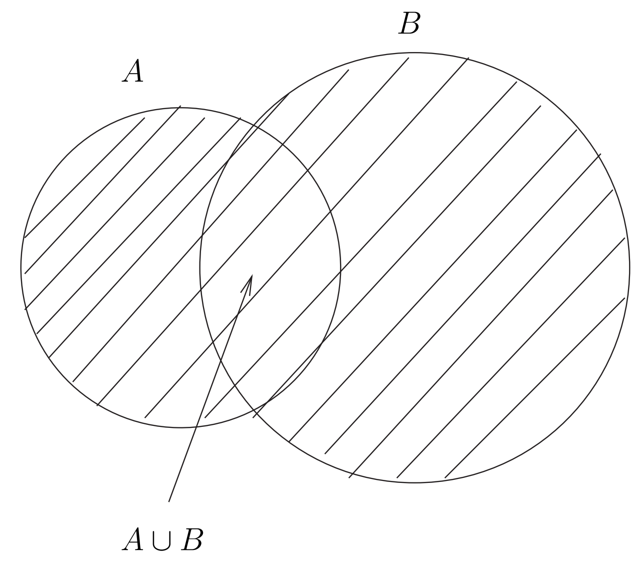
例　$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\},\ B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ であるとき，

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

(例終)

注意　和集合をベン図で表わすと，次の図のようになります。 **(注意終)**

[3] $A \cup B$ は「A と B の和集合」,「A カップ B」,「A ユニオン B」などと読む。



集合の計算には，もう一つあります。

定義 (共通部分，交わり)　二つの集合 A, B に対して，A と B の両方に属している要素の集合を，A と B の **共通部分**，あるいは**交わり** といい，　**共通部分** **交わり**

$$A \cap B$$

と表わす[4]。　**(定義終)**

例　$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ であるとき，

$$A \cap B = \{1,\ 3\}$$

(例終)

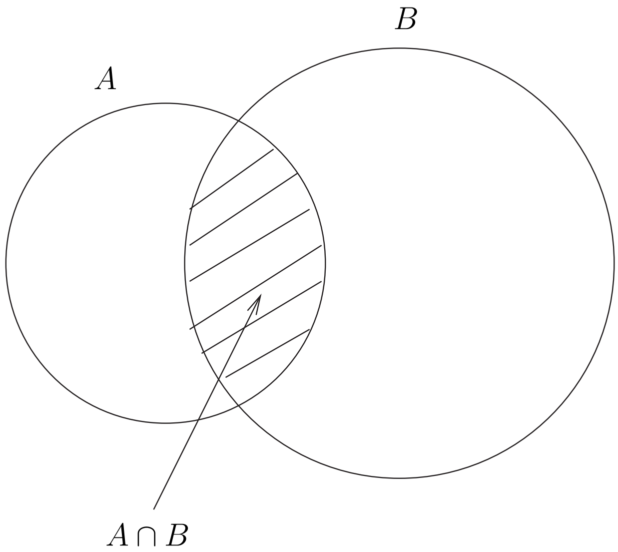
注意　共通部分をベン図で表わすと次のページの図のようになります。　**(注意終)**

例　$K = \{x|x$ は 8 の約数 $\}$, $L = \{x|x$ は 12 の約数 $\}$ とする。K と L の共通部分 $K \cap L$ を求めてみましょう。

集合 $K \cap L$ の要素は，K の要素であると同時に L の要素でもあります。言い換えると，8 の約数であると同時に 12 の約数です。ということは，8 と 12 の公約数です。つまり 8 と 12 の最大公約数である 4 の約数です（第 1 章「整数の性質」参照)。よって

$$K \cap L = \{x|x \text{ は } 4 \text{ の約数 } \}$$

[4] $A \cap B$ は「A と B の共通部分」,「A キャップ B」,「A インターセクション B」などと読む。



もし上の考え方が分かりにくかったら，それぞれの集合を要素を書き並べて表わして考えてもかまいません。やってみると

$$\begin{aligned} K &= \{1,\ 2,\ 4,\ 8\} \\ L &= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\} \end{aligned}$$

よって

$$K \cap L = \{1,\ 2,\ 4\}$$

これが 4 の約数の集合になっていることは，すぐに理解できるでしょう。 **(例終)**

例　$A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{4,\ 5\}$ とすると，A と B の両方に属する要素はない。よって

$$A \cap B = \phi$$

(例終)

練習 55 次の集合 $A,\ B$ について，$A \cup B,\ A \cap B$ を求めよ。
(1) $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}, \quad B = \{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$
(2) $A = \{1,\ 2,\ 3\}, \quad B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
(3) $A = \{x|x$ は 14 の約数 $\}, \quad B = \{x|x$ は 10 以下の奇数 $\}$

和集合と共通部分について，いろいろな計算法則が成り立ちます。数の場合と比較して，同じところ違うところをよく味わってください。
まずは明らかなものから。

定理 (集合算の性質―その 1)

（1） $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$ 　（べき等（とう）法則）
（2） $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ 　（交換法則）
（3） $A \cup B \supset A, \quad A \cup B \supset B$
（4） $A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$

ベン図を描いて納得してください。
また次の定理も，ベン図から明らかでしょう。

定理 (集合算の性質—その 2)
（1） $A \subset B$ ならば $A \cup B = B$
（2） $A \subset B$ ならば $A \cap B = A$

確かにベン図を描けば，この定理が成り立っていることを確認できるでしょう。が，実はベン図を使うことは厳密な証明にはなっていません[5]。そこでこういった定理の，ベン図を用いない証明の方法の紹介を兼ねて，以下厳密な証明を書いてみましょう。

証明 （1）二つの集合 $A \cup B$ と B が等しいことを証明するには，$A \cup B \supset B$ と $A \cup B \subset B$ の二つを証明すればよい。まず「集合算の性質 その 1」（3）よりはじめのほうの $A \cup B \supset B$ は成り立っている。よって $A \cup B \subset B$ を証明する。つまり $A \cup B$ の要素がすべて B の要素になっていることをいう。
$x \in A \cup B$ を考えよう。和集合の定義より，$x \in A$ または $x \in B$ である。
$x \in B$ のとき，これは結論であるから，これ以上何も言うことはない。
$x \in A$ であるとしよう。すると仮定から $A \subset B$ であるから，A の要素はすべて B の要素になっている。よって $x \in B$ であることが分かる。
つまり $x \in A$ ， $x \in B$ のいずれの場合も $x \in B$ であることが結論できる。
ゆえに $A \cup B \subset B$ 。
以上をまとめると $A \cup B = B$ である。 **(証明終)**

問 30 上の定理の（2）を証明せよ。

空集合はすべての集合の部分集合ですから，上の定理より次の定理が成り立つことがすぐに分かります。

系 (空集合の性質)

$$A \cup \phi = A, \quad A \cap \phi = \phi$$

[5]ベン図を使うことがなぜ厳密な証明になっていないのか，考えてみてほしい。

注意　この定理は，空集合 ϕ が，数の 0 や 1 に相当するような性質を持っていることを示しています。またこの定理から，和集合をとる計算 $\cup$ が足し算 $+$ に，共通部分をとる計算 $\cap$ がかけ算 $\times$ に対応しているように見えることも，見当がつくでしょう。**(注意終)**

「集合算の性質 その 2」は逆も成り立ちます。

定理 (集合算の性質―その 3)
（1） $A \cup B = B$ ならば $A \subset B$
（2） $A \cap B = A$ ならば $A \subset B$

この定理は，ベン図から理解することはちょっと困難です。よって定義にしたがって証明をします。

証明　（1） $x \in A$ とする。$A \subset A \cup B$ であるから，$x \in A \cup B$。今 $A \cup B = B$ であるから，$x \in B$。よって $A \subset B$。

問 31 （2）を証明せよ。

(証明終)

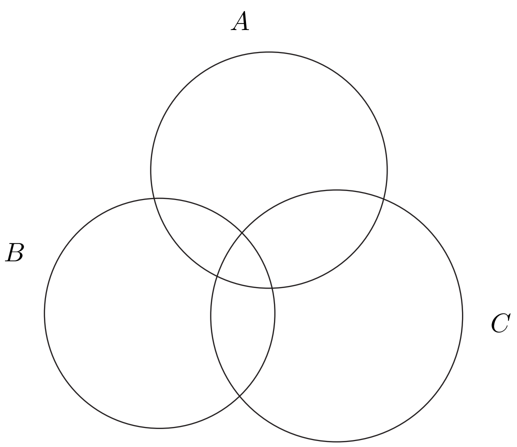
定理 (集合算の性質―その 4　結合法則)　集合 A, B, C について　**結合法則**
（1） $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
（2） $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
がなりたつ。

この定理も厳密に証明しなければいけませんが，後のこともあるので，ここではベン図を使って証明を与えておきましょう（先にも書いたように，厳密な証明にはなっていません）。

証明　三つの集合が次の図のような関係になっている場合についてのみ考える。

（1）まず左辺の $A \cup B$ を作る（120 ページの図参照）。
（2）これと C の和集合を作る。
（3）次に右辺の $B \cup C$ を作る。
（4）これと A の和集合を作る。
いずれも最後に得られた図（（2）と（4））は同じであるから，$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ である。**(証明終)**

問 32 上の証明をまねして，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ を証明せよ。



定理 (集合算の性質―その 5　分配法則)　集合 $A,\ B,\ C$ について　**分配法則**
(1)　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(2)　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
が成り立つ。

問 33 ベン図を使って上の定理を証明せよ。

5.7　補集合

集合の間の計算にはもう一つあります。それを紹介する前に，もう一つ新しい考え方を導入します。

いろいろな議論をするとき，どのような範囲で考えているのかをはっきりさせておく必要があります。
たとえば，第 1 章「整数の性質」では整数の世界で議論をしました。また，第 4 章「実数の性質」では，自然数，整数，有理数，実数と数の世界の範囲を広げながら議論をし，それぞれの世界でどのようなことが成立しているかを見てきました。
つまり考える世界を設定しておくわけです。それが次の 全体集合 の考え方です。

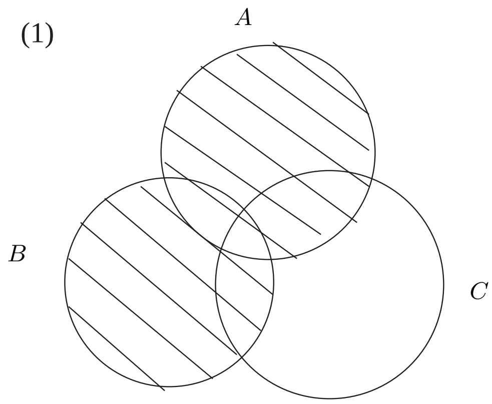
定義 (全体集合)　一つの集合 U を定めておいて，その部分集合だけを考える場合，U を **全体集合** という[6]。　**(定義終)**　**全体集合**

これから我々が考える多くの場合は，全体集合として実数全体をとっています。

定義 (補集合)　全体集合を U，A をその部分集合とする。
このとき集合 A に属さない U の要素全体の集合を A の **補集合** といい，　**補集合**

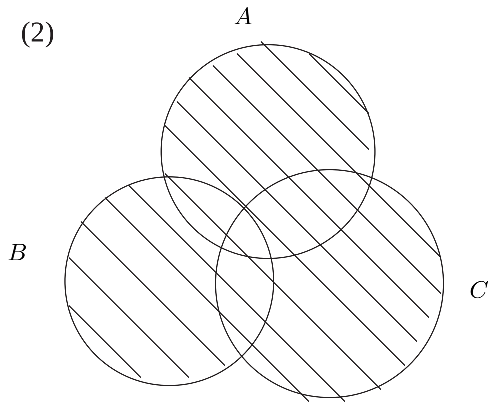
[6]宇宙のことを universe といいます。全体集合を U とするのは，ここからきているようです。

(1)



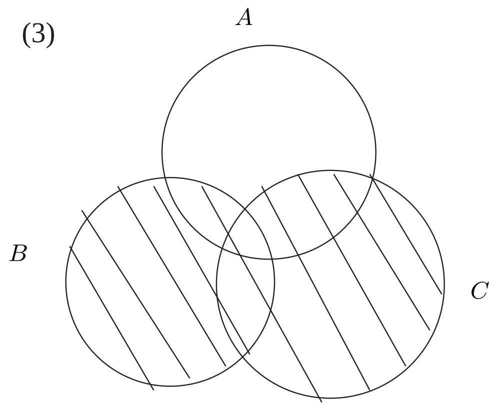
$A \cup B$

(2)



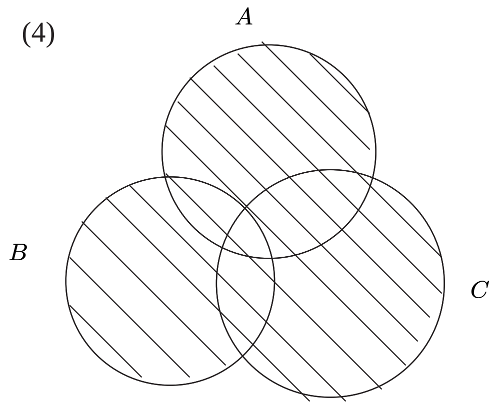
$(A \cup B) \cup C$

(3)



$B \cup C$

(4)



$A \cup (B \cup C)$

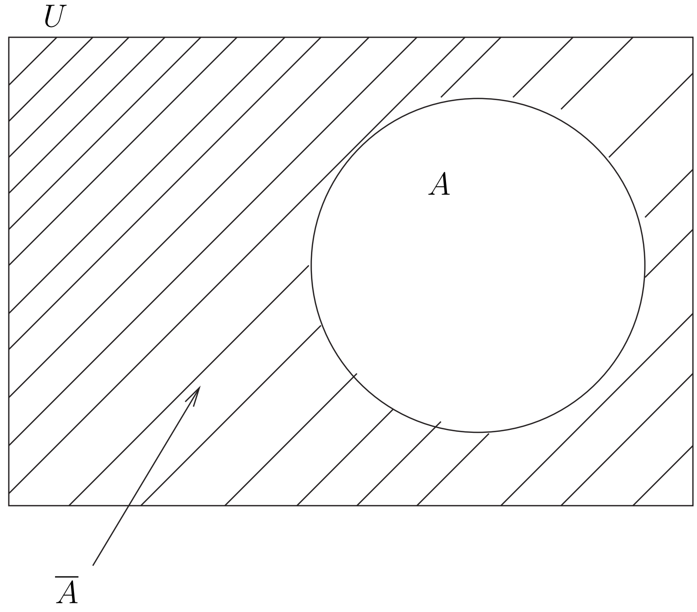
$$\overline{A}$$

と表わす（この記号は「A の補集合」，あるいは「A のバー」と読む)。

条件を使って表わすと，

$$\overline{A}=\{x|x\notin A,\ x\in U\}$$

である。 **(定義終)**



注意

(1) 補集合をベン図で表わすと上の図のようになります。
(2) 和集合や共通部分と違って，補集合は全体集合が定まっていないと求めることができないことに注意してください。
(3) 補集合を表わす記号はいろいろあります。本によっては A' や A^c を用いているものもあるので，注意してほしい。本書では，統一して $\overline{A}$ を使います。
(4) 補集合とは，数の引き算に相当するものともいえるでしょうか。が以下の性質をよく見ると，大分異なっている部分もあるので要注意です。

(注意終)

例　一けたの自然数の集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ を全体集合，$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ とするとき，$\overline{A}=\{4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$ 。 **(例終)**

練習 56 8 以下の自然数の集合を全体集合 U，$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ とする。このとき次の集合を，要素を書き並べて表わせ。

(1) $\overline{A}$　(2) $\overline{A}\cup B$　(3) $A\cup\overline{B}$
(4) $\overline{A}\cap\overline{B}$　(5) $\overline{A\cup B}$

補集合に関する性質をならべましょう。まずはすぐに理解できるものから。

定理 (補集合の性質)　U を全体集合，A をその部分集合とする。このとき以下が成り立つ。
(1)　$\overline{\overline{A}} = A$
(2)　$A \cup \overline{A} = U$
(3)　$A \cap \overline{A} = \phi$
(4)　$\overline{\phi} = U$
(5)　$\overline{U} = \phi$

いずれもベン図を描けば納得できるでしょう（$\overline{\overline{A}}$ は「A の補集合」の補集合という意味です）。

補集合については次も成り立ちます。

定理 (包含関係と補集合)　$A \subset B$ ならば $\overline{A} \supset \overline{B}$。

定理 (ド・モルガンの法則)　**ド・モルガンの法則**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

注意　ド・モルガンは人の名前です
上の定理のいずれの式も，ド・モルガンの法則と呼びます。　**(注意終)**

いずれもベン図を描くことで納得できるでしょう。まずは使えるようになってください。
論理を使ってきちんと証明することは，次の章でやって見せます。

例題 18 $(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ を簡単にせよ。

解説　ド・モルガンの法則や補集合の性質を使って，変形していきます。以下の等式のどこでそれらが使われているか，確認しながら読んでください。

解答例

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= (A \cup B) \cup \overline{A \cup B} \\ &= U\end{aligned}$$

(解答例終)

練習 57 $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ を簡単にせよ。