第7章　有限集合

7.0　はじめに

前章で集合に関する初歩的なことを解説しました。しかし，この考え方にはまだ馴染みが薄いでしょうから，なんとなくわかりにくいと感じている人も多いことと思います。

そこでこの章では，引続き集合を題材に，いくつかの計算を紹介することにします。集合の中でも要素の数が有限なもの，つまり有限集合の性質と，上手な要素の数え方について，集合の扱い方になれてもらうことを目的に紹介します。ここに提示されるさまざまな例をよく観察して，集合の扱い方に慣れていってください。

7.1　有限集合と無限集合

集合の表し方を説明した節で，5 以下の自然数の集合 A と，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を例に挙げました。

前者は要素の個数がたった 5 個しかありませんが，後者は無数にあります。

こうした観点から，集合は二つの種類に分類できることがわかります。

定義 (有限集合，無限集合)　要素の数が限られた集合を **有限集合**，そうでない集合を **無限集合** という。 **(定義終)**　**有限集合**　**無限集合**

例　5 以下の自然数の集合 A は有限集合，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は無限集合である。 **(例終)**

練習 70 次の集合を有限集合と，無限集合に分類せよ。

(1) 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$

(2) 100 以下の偶数全体の集合 B

(3) 空集合 ϕ

(4) 素数全体の集合 P

無限集合については色々と面白い現象があるのですが，それを書き出すと長くなります。興味のある人は,「集合論」という題名をもった大学の教科書をご覧ください。先に紹介した松阪先生の「集合位相入門」も，よい入門書でしょう。

7.2　集合の要素の個数

以下，本章では有限集合のみを扱います。特にその集合がいくつの要素をもつのかを考察しましょう。

定義 (有限集合の要素の個数)　A を有限集合とするとき，その要素の個数を $n(A)$ で表す。 **(定義終)**

有限集合の要素の個数を表す記号はいろいろありますが，本シリーズでは $n(A)$ を用いることにします。

例　A を 10 以下の自然数の集合とすると

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$$

ですから，

$$n(A) = 10$$

です。 **(例終)**

練習 71 次の集合について $n(A)$ を求めよ。

(1) 20 以下の素数の集合 A　　(2) 36 の約数の集合 A

さて，少し複雑な例を挙げましょう。

例題 21 A を 1 以上 100 以下の 6 の倍数の集合とするとき，$n(A)$ を求めよ。

解説　100 以下くらいなら書き上げることも，手間さえ惜しまなければ短い時間で可能でしょう。次を読む前に，自分で書き上げてみてください。

やってみましたか?

A は次のようになりますね。

$$A = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60,\ 66,\ 72,\ 78,\ 84,\ 90,\ 96\}$$

ということは，$n(A) = 16$ です。そんなに難しくはありませんね!

でもこれが 1000 以下，あるいは 100000000 （いくらだ?）以下だったらどうでしょう?　書き上げるのは不可能ではありませんが，とても大変です。

うまく数えあげる方法はないでしょうか?　実はあります。

その前に，みなさんは上の A の要素を書いていくときにどんなことをしていましたか?　それを思い出してみてください。

たぶん多くの人は，6 の段の九々,「ろく いち が ろく，ろく に じゅうに，…」を言いながら書いていったのではないでしょうか? これを使って，A のはじめの方を書き直してみましょう。すると，最後の 96 は $96 = 6 \times 16$ に注意しますと，

$$A = \{6 \times 1,\ 6 \times 2,\ 6 \times 3,\ \cdots,\ 6 \times 16\}$$

となります。

おや!　A の個数の 16 という数字が，最後に出てきました!!

これは偶然でしょうか?

そうではありませんね。$6 \times n$ の n に順に 1, 2, 3, $\cdots$ を代入して計算していった（それが九々です）のですから，6×16 の 16 が 16 番目の数であるのはあたりまえです。

さて，これで少しは簡単に要素の個数を求めることができそうですが，まだそんなに単純ではありません。上の場合でいう 16 をもっと簡単に計算する方法はないのでしょうか?

それにはこうすればいいでしょう。上の最後の要素 96 は，100 に最も近い 6 の倍数です。これを使って 100 を表すと，

$$100 = 96 + 4$$

さらに書き直すと，

$$100 = 6 \times 16 + 4$$

となります。

こういった式を前にみたことがありますね。そう，第 1 章「整数の性質」の一番最初で説明した,「除法の原理」です。つまり $100 = 6 \times 16 + 4$ は 100 を 6 で割ったときの，商と余りを表しています。ということは，今の場合 $100 \div 6$ を計算したときの商がまさに 100 以下の 6 の倍数の個数になっているわけです。

解答例

$$100 \div 6 = 16 \quad \text{余り } 4$$

より

$$n(A) = 16\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 72 次の集合の要素の個数を求めよ。

(1) 1 以上 100 以下の 7 の倍数の集合

(2) 1 以上 10000 以下の 8 の倍数の集合

(3) 3 けたの 4 の倍数の集合

7.2.1　和集合の要素の個数

　次に，和集合の要素の個数について説明しましょう。

　二つの集合 A, B があるとき，和集合 $A \cup B$ の要素の個数 $n(A \cup B)$ はどうなるでしょう？　一般的には

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

ではありませんね。
　たとえば,

例　$A = \{x | x$ は 18 の正の約数 $\}$, $B = \{x | x$ は 12 の正の約数 $\}$ とするとき,

$$\begin{array}{rcl} A &=& \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\} \\ B &=& \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\} \end{array}$$

なので，$n(A) = 6$, $n(B) = 6$ ですが,

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18\}$$

なので，$n(A \cup B) = 8$ であり,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

とはなっていません。　　**(例終)**

　この数え方のまずいところは，上の例で言えば 1，2，3，6 は A にも B にも属しているので，2 回数えているところにあります。
　逆にいえば，2 回数えているところを除けば個数が得られます。上の例からもわかるように，2 回数えているところは A, B の両方に属している要素，つまり $A \cap B$ の要素ですから，$n(A) + n(B)$ から $n(A \cap B)$ を引けば，和集合の要素の個数 $n(A \cup B)$ に等しくなります。
　つまり次の定理が成り立ちます。

定理 (和集合の要素の個数)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

注意　$A \cap B = \phi$，つまり A と B の共通部分が空集合なら $n(\phi) = 0$ ですから,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

となります。　　**(注意終)**

例題 22 100 以下の自然数のうち，3 または 4 の倍数の個数を求めよ。

解説　100 以下の自然数で 3 の倍数の集合を A，4 の倍数の集合を B としましょう。このとき $n(A \cup B)$ を求めればよいことになり，上で説明した公式が使えます。

前節でやったことから，100 以下の自然数で 3 の倍数の個数 $n(A)$，4 の倍数の個数 $n(B)$ はすぐに計算できます。

一方 $n(A \cap B)$ はどうでしょう?　今の場合 $A \cap B$ は，3 の倍数であると同時に 4 の倍数にもなっている 100 以下の自然数全体の集合です。言い替えると，3 と 4 の公倍数です。

第 1 章「整数の性質」でやったように，3 と 4 の公倍数は，3 と 4 の最小公倍数の倍数でした。つまり $A \cap B$ は 3 と 4 の最小公倍数 12 の倍数の集合です。

解答例　100 以下の自然数で 3 の倍数の集合を A，4 の倍数の集合を B とする。このとき $A \cap B$ は 3 と 4 の最小公倍数の倍数の集合である。

3 と 4 の最小公倍数は 12 なので，$A \cap B$ は 12 の倍数の集合である。

$100 \div 3 = 33$ 余り 1 より $n(A) = 33$，$100 \div 4 = 25$ より $n(B) = 25$，さらに $100 \div 12 = 8$ 余り 4 より $n(A \cap B) = 8$。ゆえに，

$$n(A \cup B) = 33 + 25 - 8 = 50$$

つまり

50 個 $\cdots$ **(答)**

(解答例終)

練習 73 200 以下の自然数のうち，4 または 6 の倍数の個数を求めよ。

7.2.2　補集合の要素の個数

補集合の要素の個数については，次の定理が成り立ちます。

定理 (補集合の要素の個数)　全体集合を U，A をその部分集合とするとき，

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$

証明　$U = A \cup \overline{A}$ で $A \cap \overline{A} = \phi$ より，

$$n(U) = n(A) + n(\overline{A})$$

$n(A)$ を移項して，

$$n(\overline{A}) = n(U) - n(A)$$

(証明終)

例　100 以下の自然数のうち 6 で割り切れない数の個数を求めましょう。この集合は 6 の倍数の集合を A とするとき $\overline{A}$ で表すことができます。また全体集合 U は 100 以下の自然数です。よって $n(U) = 100$，$n(A) = 16$ ですから，

$$n(\overline{A}) = 100 - 16 = 84$$

つまり 84 個です。　**(例終)**

練習 74 1000 以下の自然数のうち，14 で割り切れない数は何個あるか。

7.2.3　例　題

以上の二つの公式

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(\overline{A}) &= n(U) - n(A) \end{aligned}$$

が基本です。

この節では，これらが使えるもう少し複雑な問題の解き方を例題の形で紹介しましょう。

例題 23 100 以下の自然数のうち，2 でも 3 でも割り切れない数はいくつあるか。

解説　100 以下の自然数のうち 2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B としましょう。このとき 2 でも 3 でも割り切れない数の集合は $\overline{A} \cap \overline{B}$ となります。つまり $n(\overline{A} \cap \overline{B})$ を求めたいのですが，このままでは計算できません。しかし「ド・モルガンの法則」から

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

ですから，

$$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B})$$

で，$n(\overline{A \cup B})$ を求めればいいのですから，上の二つの公式が使えそうです。

まず

$$n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$$

ですから，$n(A \cup B)$ がいりますが，これははじめの公式で計算できます。

解答例　100 以下の自然数のうち 2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とする。このとき 2 でも 3 でも割り切れない数の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ となる。

「ド・モルガンの法則」から

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$$

よって

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})$$

つまり $n(\overline{A\cup B})$ を求めればよい。

さて，$n(A)=50,\ n(B)=33,\ n(A\cap B)=16$ より，

$$n(A\cup B)=50+33-16=67$$

よって，

$$n(\overline{A\cup B})=100-67=33$$

つまり

33 個 $\cdots$ **(答)**

(解答例終)

練習 75 1000 以下の自然数のうち，4 でも 6 でも割り切れない数はいくつあるか。

例題 24 生徒数が 45 人のクラスで，数学と英語の試験を行なった結果，数学が 65 点以上の生徒は 24 人，英語が 65 点以上の生徒は 22 人，数学も英語も 65 点未満の生徒は 10 人であった。

数学だけ 65 点以上の生徒は何人いるか。

解説　数学が 65 点以上の生徒の集合を A，英語が 65 点以上の生徒の集合を B としましょう。このとき数学だけ 65 点以上の生徒は集合の記号でどう表すことができるでしょう?

文だけではわかりにくいですから，ベン図を用いましょう。すると，図の斜線の部分であることがわかると思います。

この部分は，A に入っているが，B に入っていない部分になっています。つまり集合の記号で書けば

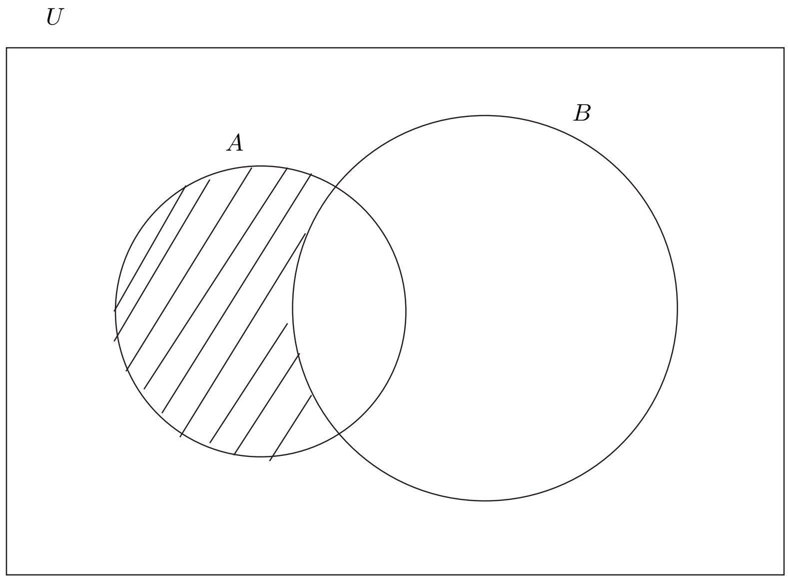
$$A\cap\overline{B}$$

です。つまりこの問題は $n(A\cap\overline{B})$ を求めなさい，と要求しているわけです。

どうやったら出るでしょうね?

ここまでに紹介した二つの公式

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ n(\overline{A}) &= n(U)-n(A) \end{aligned}$$



はすぐには使えません。また先の例題で用いた「ド・モルガンの法則」を用いて $A\cap\overline{B}$ を変形してもうまい形は出てきません。

もう一度図を見ましょう。

すると，斜線の部分は A と B の共通部分 $A\cap B$ を A から取り去ったものであることに気がつくでしょう。ということは，

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$$

です。よって，$n(A\cap B)$ が出れば，$n(A\cap\overline{B})$ を計算することができます。

では $n(A\cap B)$ は計算できるでしょうか?

$n(U)=45$ であり，二科目とも 65 点未満の生徒が 10 人なので，$n(\overline{A\cup B})=10$ です。よって，

$$n(A\cup B)=45-10=35$$

です（$A\cup B=\overline{\overline{A\cup B}}$ に注意してください)。

よって $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より，

$$35=24+22-n(A\cap B)$$

これを解けば

$$n(A\cap B)=11$$

を得ます。

解答例　数学が 65 点以上の生徒の集合を A，英語が 65 点以上の生徒の集合を B とする。

$n(U)=45$ であり，二科目とも 65 点未満の生徒が 10 人なので，$n(\overline{A\cup B})=10$。よって，

$$n(A\cup B)=45-10=35$$

よって $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より，

$$35=24+22-n(A\cap B)$$

これを解けば

$$n(A\cap B)=11$$

ゆえに

$$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=24-11=13$$

つまり

13 人 $\cdots$ **(答)**

(解答例終)

練習 76 生徒数が 38 人のクラスで，自転車を使って通学している人は 20 人，バスを使って通学している人は 18 人，どちらも使っていない人は 6 人であった。
　バスのみを使って通学している人は何人か。