第８章　１次方程式の復習

8.0　はじめに

本章では中学校のときに学習した１次方程式，連立２元１次方程式について復習します。

しかしながらこれらの方程式をどのようにして解くのか，あるいはどのように応用するのか，についてはほとんど触れません。むしろ方程式を解くとはどういうことなのか，方程式に解が必ずあるのだろうか，というようなより根本的な問題を扱うことにします。

簡単に内容を説明しましょう。

はじめの四つの節では言葉を整理しました。

第５節からが本章の本論です。その第５節では１元１次方程式，つまり文字が一つの方程式が必ず解けること，そしてそれしか解を持たないことを説明しています。

第６節，第７節では連立２元１次方程式を扱います。これらの節では中学校では出会わなかったタイプの連立方程式を紹介し，方程式がいつでも解を持つわけではないことを理解してもらおうと思っています。しかしその一般論は複雑なので，これについては補講で触れ，本文では具体的な例でのみ説明しました。できれば補講も熟読し，具体例との対応をよくつかんでおいてください。

最後の節は，連立３元１次方程式です。連立２元１次方程式の解き方と共通するものは何か，に注意しながら読み進めてください。もちろん，これからは連立３元１次方程式もすらすらと解けるようにもなっていてください。

8.1　等式，恒等式，方程式

本章ではまず方程式を代数的に扱い，後で図形的な解釈を与えていくことにします。いつものように言葉の整理からはじめましょう。

定義 (等式)　いくつかの文字についての二つの式 $A,\ B$ を等号で結んだもの

$$A = B$$

を **等式** という。　**等式**

等式 $A = B$ において， A をこの等式の **左辺**，B をこの等式の **右辺** という。 **左辺**
また二つを合わせて **両辺** という。 **(定義終)** **両辺**

この定義では文字がいくつあってもよい，といういい方をしていることに注意してください。

例 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$，$3x + 4 = 2x - 3$ は等式です。
前者の左辺は $(a+b)^2$ ，後者の右辺は $2x - 3$ です。 **(例終)**

上に二つの例を挙げましたが，いずれも等式であるもののその性質が少し異なっています。実際前者の等式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ は a, b の二つの文字にどんな数を代入しても成り立っているのに対して，後者の等式 $3x + 4 = 2x - 3$ は特殊な x の値に対してのみ成立するものです。
そこで次のように言葉を定めます。

定義 (恒等式，方程式) いくつかの文字についての等式で，その文字にどんな値を代入してもその等号が成り立つようなものを **恒等式**（こうとうしき） という。 **恒等式**
また，特別な値についてのみ等号が成り立つような等式を **方程式** という。 **方程式**
(定義終)

例 二つの等式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$，$3x + 4 = 2x - 3$ について，前者は恒等式，後者は方程式である。 **(例終)**

注意 与えられた等式が恒等式なのか，方程式なのかはすぐにはわかりません。
代入してみて成り立たないような値が見つかればそれは方程式です。
恒等式であることを断言するには証明が必要となります。これについては後の章で解説します。 **(注意終)**

以下我々はこの章の表題にも含まれている「方程式」のみを扱います。

方程式に関連することばを続けましょう。

定義 (方程式の解，方程式を解く) 方程式において，等号を成立させるような値をその方程式の **解** という。さらに方程式の解を **すべて** 求めることを，その方程式を **解く** という。 **(定義終)** **解** **解く**

注意 方程式を解くとは，方程式の「すべての解を求めること」です。
中学校のときはあまりこういったことを気にしてこなかったはずですが，これからは求めたものがその方程式のすべての解になっているかどうかは大問題になります。**(注意終)**

例を挙げましょう。

例　(1) $3x+4=2x-3$ は方程式です。$x=-7$ はこの方程式の解です。
なぜならば,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 3\times(-7)+4=-17\\ (\text{右辺}) &= 2\times(-7)-3=-17\end{aligned}$$

で,

$$(\text{左辺})=(\text{右辺})$$

だからです。

しかし $x=1$ は解ではありません。なぜならば,

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= 3\times1+4=7\\ (\text{右辺}) &= 2\times1-3=-1\end{aligned}$$

で,

$$(\text{左辺})\neq(\text{右辺})$$

だからです。

−7 以外に解がないかどうかは，検討する必要があります。

(2) $x^2+y^2=1$ は方程式であり，$x=1,\ y=0$ はその解の「一つ」です (実際に代入して解になっていることを確かめよ！)。実は方程式 $x^2+y^2=1$ は無数の解を持ちます（$x=1,\ y=0$ 以外の解を四つ与えよ。三つはすぐに見つけてほしいものですね。）[1]。 **(例終)**

注意　(1) の方程式を「解く」方法は皆さんすでによく知っているはずです。そして実はその方法が，すべての解を与えていること，つまり上の意味で方程式を「解いた」ことになります。このことを以下の節で説明しましょう。

一方 (2) の等式も方程式なのですが，これを解くのは容易ではありません。しかし後でこのような方程式を解く方法も説明しましょう (万能な方法とは言えないのが残念ですけどね)。また解が無数にあることも納得できる説明を与えましょう。 **(注意終)**

8.2　等号の性質

等号は次のような性質を持っています。

定理 (等号の性質)

[1] この方程式のように文字を二つ以上含むような方程式の解とは，$x=1,\ y=0$ のような数の組のことをいいます。

（1）**(反射律)**　$a = a$
（2）**(対称律)**　$a = b$ ならば $b = a$
（3）**(推移律)**　$a = b,\ b = c$ ならば $a = c$

注意　表題は定理としましたが，我々の今の知識では証明をすることができません。よって認めて先へ進むことにします。

まあ，証明するまでもなく当り前に成り立っている性質であると感じられるでしょう。しかし後で使いたいので，確かめの意味もあってここで触れることにしました。

ちなみに (2) の性質はこれまでに何度か用いています。　**(注意終)**

8.3　等式の性質

先の節では「等号」の性質について触れました。この節では方程式を解くときに使う「等式」の性質について説明しましょう。

等式は次のような性質を持っています。

定理 (等式の性質 ——その１)
（1）$A = B$ ならば $A + C = B + C$
（2）$A = B$ ならば $A - C = B - C$
（3）$A = B$ ならば $AC = BC$
（4）$A = B,\ C \neq 0$ ならば $\dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{C}$

証明　ここでは (1) だけ証明する。残りは皆さんの演習問題としよう。

さて第 4 章「実数の性質」で触れたように $a - b = 0$ のとき $a = b$ と書いた。よって $A + C = B + C$ を証明するには $(A + C) - (B + C) = 0$ を証明すればよい。ところが，

$$(A + C) - (B + C) = A + C - B - C = A - B$$

ここで仮定から $A-B = 0$ なので，$(A+C)-(B+C) = 0$。ゆえに $A+C = B+C$。
(証明終)

問 41 上の定理の残りを証明せよ。

注意　ここには四つの性質を挙げましたが，第 4 章「実数の性質」でも触れましたように C を引くということは $-C$ を加えること，C で割るということは $\dfrac{1}{C}$ をかけることと同じです。よって理論的には (1) と (3) だけあれば事足ります。

しかしながら (2) や (4) があったほうが覚えやすいので敢(あ)えて挙げてあります。

(注意終)

定理「等式の性質——その 1」は逆も成り立ちます。

定理 (等式の性質 ——その 2)
(1) $A+C=B+C$ ならば $A=B$
(2) $A-C=B-C$ ならば $A=B$
(3) $AC=BC,\ C\neq 0$ ならば $A=B$
(4) $\dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{C}$ ならば $A=B$

問 42 上の定理を証明せよ[2]。

8.4 代数方程式

方程式に関する言葉の定義を続けましょう。

定義 (代数方程式，未知数，方程式の次数) いくつかの文字を含む整式 F に対して,

$$F=0$$

の形の方程式を **代数方程式**という。 **代数方程式**
また代数方程式に含まれる文字をその方程式の **未知数** という。 **未知数**
さらに代数方程式 $F=0$ の整式 F の次数をこの代数方程式の **次数** という。 **次数**
(定義終)

上ではかなり一般的な書き方にしてあるのでイメージがつかめないかもしれません。例を挙げましょう。

例 (1) $3x^4+3x-4=0$ は x に関する 4 次の代数方程式です。未知数は x 一つ。
(2) $x^2+y-5=0$ は $x,\ y$ に関する 2 次の代数方程式です。未知数は $x,\ y$ の二つ。
(3) $2^x=8$ は代数方程式ではありません。しかし x に関する方程式です。**(例終)**

これからしばらくの間は代数方程式のみを扱います。しかし (3) のようなタイプの方程式も，将来の演習問題として扱うことになるでしょう。

[2]実は上の定理には二通りの証明があります。一つは定理「等式の性質——その 1」のように直接証明する方法，今一つは定理「等式の性質——その 1」を用いる方法です。この二通りの方法で証明を考えてみてください。
このように何通りもの証明方法を持つ定理もあります。定理を見たとき「別の証明方法はないのかな？」と考えるのは数学のよい勉強方法です。できれば習慣づけてください。

8.5 1元1次方程式

未知数がたくさんある代数方程式は扱い方が複雑なので，まずはできるだけ単純な場合——つまり未知数が一つの場合——から扱っていきましょう。

定義 (n **次方程式**) 与えられた方程式を展開，移項などの整理することによって

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

(ただし $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0$ は定数で，$a_n \neq 0$) の形になるものを n **次方程式**という。 n **次方程式**

(定義終)

いきなり n 次方程式を扱うことはできないので，この中でももっとも単純な場合，つまり「1次方程式」を扱います。

改めて定義するなら，

定義 (1元1次方程式) 与えられた方程式を展開，移項などの整理をすることによって

$$ax + b = 0$$

(ただし $a,\ b$ は定数で $a \neq 0$) の形になるものを **1元1次方程式** という。

(定義終)

注意 「1元」とは——ここでは——「未知数が一つ」という意味です。最近はあまり使われないようですね。 **(注意終)**

1元1次方程式は簡単に解くことができます。

実際 $ax + b = 0$ の定数項 b を移項して，両辺を a で割ればよい。

先に紹介した「等式の性質」を使って実際に変形して見せると，まず両辺から b を引いて

$$(ax + b) - b = 0 - b$$

整理して

$$ax = -b$$

$a \neq 0$ なので両辺を a で割ることができて

$$(ax) \div a = (-b) \div a$$

これを整理して

$$x = -\frac{b}{a}$$

ここまでは中学校で具体的な問題でやってきているので，文字が係数の一般論でも納得することができるでしょう[3]。

[3]もしもわかりにくいというのなら a が3，b が2の場合，つまり $3x + 2 = 0$ という方程式で考えてみてください。

もう少し厳密な話をしましょう。

実際，上になにげなく「１元１次方程式は簡単に解くことができる」と書きましたが，先にも注意したように,「方程式を解く」とは「与えられた方程式の解を **すべて** 求めること」でした。すると上の手順で **すべての解が求まったのかどうか** が問題になります。

これは次の二つのことが示せればよいですね。

（1） $x=-\dfrac{b}{a}$ は方程式 $ax+b=0$ の解である。

（2） 方程式 $ax+b=0$ の解は $x=-\dfrac{b}{a}$ 以外にはない。

まず「$x=-\dfrac{b}{a}$ が方程式 $ax+b=0$ の解である」ことを見るは，$x=-\dfrac{b}{a}$ を方程式 $ax+b=0$ の左辺に代入し，計算した結果が０になることを確かめればよい。

実行すると，

$$\begin{aligned} ax+b &= a\times\left(-\frac{b}{a}\right)+b \\ &= -b+b \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $x=-\dfrac{b}{a}$ は方程式 $ax+b=0$ の解です。

次に「方程式 $ax+b=0$ の解は $x=-\dfrac{b}{a}$ 以外にはない」ことを示しましょう。これは「もし方程式 $ax+b=0$ を満たす数 x_0 があったとしたら」という仮定から出発します。

方程式 $ax+b=0$ を満たす数 x_0 があったとします。すると

$$ax_0+b=0$$

b を移項して

$$ax_0=-b$$

$a\neq 0$ なので両辺を a で割ると

$$x_0=-\frac{b}{a}$$

よって x_0 は $-\dfrac{b}{a}$ でなければいけません。つまり「方程式 $ax+b=0$ の解は $x=-\dfrac{b}{a}$ 以外にはない」ことがわかります。

上の説明を読んでいて「はて？　どこかで見たような気がする」と感じた人も多いことでしょう。そう，x が x_0 に変わっただけで，先に挙げたみなさんがもうよくご存知の方程式の解き方そのものですね！

ということは，みなさんは意識せずに与えられた方程式の解がこれしかない，というプロセスをたどっていたことになります。

以上で１次方程式 $ax+b=0$ の解が $-\dfrac{b}{a}$ ですべてであることが示せました。

ところで，普段１次方程式を解くときには上のようなことを一々確かめることはしていません。それに，方程式を解く練習に与えられるような問題は，はじめから $ax+b=0$ の形をしておらず，この形にまで変形する方に手間がかかりました。

与えられる方程式の形は問題によって異なるので，本来なら一々確かめなければならないはずです。それをやらないのはなぜでしょう？

上では

（１） $x=-\dfrac{b}{a}$ は方程式 $ax+b=0$ の解である。

（２） 方程式 $ax+b=0$ の解は $x=-\dfrac{b}{a}$ 以外にはない。

の二つを示したのですが，これら二つのことの証明と等式の性質をよく見ると，実は後半のものだけで十分であることが分かります。

実際，定理「等式の性質——その 1」,「等式の性質——その 2」をあわせると，たとえば

定理 (等式の性質)

$$A=B \iff A+C=B+C$$

が成り立ちます。つまり $A=B$ と $A+C=B+C$ はお互いにどちらへも変形できます。$A=B$ と $AC=BC$ も同様です (ただし $C\neq 0$ とする)。

移項による変形は，両辺に同じものを加えることによってなされます。また $ax=-b$ から $x=-\dfrac{b}{a}$ への変形は両辺に同じものをかけることによってなされます。そして上の定理からこれらの変形は逆にもたどれます。つまり，変形前の式と変形後の式はお互いにどちらへも変形できます。

そこで先の (２) の変形を見なおしましょう。するとすべての変形は等式の性質によっており，すべての式はどちらへも変形できることがわかるでしょう。

以上のことから，１次方程式を解いていくプロセスは逆にたどることができる，ということがわかります。では実際に逆にたどってみましょう。すると，(１) の証明を与えていることになっていることに気がつくでしょう (実際に (２) のプロセスを下から書き直し，(１) になっていることを確かめよ！)。つまり方程式を解くプロセスだけで (１) と (２) の両方を示したことになっているのです。

今の議論は１次方程式 $ax+b=0$ を解く部分だけについてのものですが，我々が練習のために解いてきたさまざまなタイプの１次方程式の変形では，すべて上で述べた変形のみを用いています。

よってどんな１次方程式でも，それを解いていくプロセスはいつでも逆にたどれます。

これが方程式を解くときに (2) のプロセスだけを示してきた理由です[4]。

8.6 連立２元１次方程式

8.6.1 n 元方程式の定義

中学のときには，先の節で触れたような１元１次方程式以外に,「連立方程式」というものを学習しました。この節ではこれについて復習しましょう。

まずは言葉の定義から。

定義 (n 元方程式) 代数方程式 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = 0$ のように未知数が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の n 個のものを n **元方程式** という。 n **元方程式**

また $F(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) = 0$ を満たす数の組 $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \cdots,\ x_n = a_n$ をこの方程式の **解** という[5]。 **(定義終)**

上の定義では未知数を $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ というように書きましたが，数が少ないときには $x,\ y,\ z$ のように連続するアルファベットを使うことが多いようです。

また代数方程式の次数については前に定義しました。よって

例 $3xy - 2y^2 + z - 3 = 0$ は $x,\ y,\ z$ の三つが未知数なので，３元２次方程式である。$(x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 2)$ はこの方程式の解である。 **(例終)**

未知数が１個の場合はすでに先の節の話で終わっています。そこで次に単純な場合，つまり２元の方程式を扱うことになります。

念のためにもう一度定義を書けば,

定義 (2 元方程式) 未知数が二つの方程式

$$F(x,\ y) = 0$$

[4]中学校のときに 検算 をしたかもしれません。それは得られた解を左辺と右辺のそれぞれに代入して計算し，結果が一致することを確かめるものでした。

上のことを 鑑(かんが) みるとこれは不必要に思えます。しかしよく考えましょう。我々は時として計算間違いを犯します。理論的には (2) のプロセスだけで十分ですが，理論は我々が計算間違いを犯す可能性は 皆無(かいむ) として作られています。よって (特に計算に自信がない場合) 検算をすることで，間違いを犯す可能性を減らすのです (もっとも検算の時に計算間違いをすることもあります。しかしこのことまで考え出すときりがありません。それゆえ「可能性を減らす」と書いたのです)。

[5]解の書き方はいろいろあります。人によっては $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ のように書く方法を教えられているかもしれません。これはどちらでも構いません。

個人的には $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \cdots,\ x_n = a_n$ の方が好きなのですが，本書では気分によって使い分けることでしょう。

を **2元方程式** という。 **(定義終)**

以下この節では2元1次方程式を扱いましょう。これは一般的な形で書くなら,

$ax+by+c=0$　　(ただし $a,\ b,\ c$ は定数で，a と b は同時に0にはならない)

となります。当然この場合 x と y が未知数です。

さて2元1次方程式の解はどうなっているでしょう。
たとえば $2x+y-1=0$ で考えましょう。この式をじっと見ると $x=1,\ y=-1$ という解が見つかるかもしれません。人によっては他の解を見つけたかもしれません。
これから容易に想像できるように，2元1次方程式の解は一つとは限りません。一般にはたくさんの解を持っています。

いつでもうまくいくわけではありませんが、上の方程式 $2x+y-1=0$ が無数の解を持つことは次のようにすれば示せます[6]。
この方程式を y について解くと

$$y=-2x+1$$

これは1次関数の形をしています。つまり x に値を代入するとそれに応じて y の値が定まります。そしてそうやって決まる値の組 $(x,\ y)$ が方程式 $2x+y-1=0$ を満たすことは，y について解くプロセスが同値変形であることからすぐに分かります。一方 $y=-2x+1$ に代入できる x の値は無数にあるので，方程式 $2x+y-1=0$ の解も無数にあることが判明します。

上では与えられた方程式 $2x+y-1=0$ を y について解きましたが，わざわざこんなことをせずに，次のように考えてもかまいません。
つまりとにかくなんでもいいから x (あるいは y) の値を方程式 $2x+y-1=0$ に代入します。すると (x に代入したら)y に関する1次方程式が得られます。この y に関する1次方程式が解けることは先の節で説明した通りですから，代入した x の値とこのようにして求められた y の値の組が元々の方程式 $2x+y-1=0$ の解になっていることは明らかです。代入できる x の値に制限はないので，方程式 $2x+y-1=0$ が無数の解を持つことが判明します。

一般に方程式 $ax+by+c=0$ において a と b が同時に0になることはない (上の2元1次方程式の定義を見よ！) ので，いずれかの未知数について必ず解くことができます。
よって2元1次方程式 $ax+by+c=0$ は無数の解を持つことが結論できます。

[6]どんな2元1次方程式も解を無数に持つことがこの後の議論で理解できるでしょう。

ちょっと難しい話 (分かりにくければ飛ばして先に進んでもよい)　a と b の一方だけが０の場合はどう考えたらよいでしょう？

たとえば a が０のとき，方程式は $by+c=0$ となります。この方程式には未知数 x が含まれていません !!　これでも「２元」方程式と呼んでもよいのでしょうか？

実は形式的には y に関する１元１次方程式なのですが，頭の中では x, y に関する２元１次方程式と考えてもよいのです。

つまり同じ式であっても，どのように見るのかは，それを扱う本人にまかされています。で，今の場合は２元１次方程式と考えることにします。

では先のように x を代入するにはどうしたらよいでしょう？　これは代入したつもりで，その結果 $by+c=0$ という方程式が得られたと考えるのです。いいかえると方程式 $by+c=0$ はどんな x を代入しても成り立つ式，つまりどんな x もこの方程式の解になっていると考えるのです。

このように考えると，今の場合も代入できる x の値は無数にあるので，２元１次方程式 $by+c=0$ は常に無数の解を持つ，と考えることができます。

以上のことのまとめを兼ねて次の問いをやってみてください。

問 43 次の定理を証明せよ。

定理 (2 元１次方程式の解の個数)　２元１次方程式

$$ax+by+c=0 \qquad (\text{ただし } a,\ b,\ c \text{ は定数で，} a \text{ と } b \text{ は同時に0にはならない})$$

は無数の解を持つ。

8.6.2　連立方程式の定義

さて，中学校のときに勉強した２元１次方程式は，連立方程式として扱ってきました。ここからは話を連立方程式にしぼりましょう。

まずは言葉の定義をします。次の定義はもっとも一般的なものです。

定義 (連立方程式，連立方程式の解)　n 個の未知数を含む m 個の方程式をまとめたもの

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)=0 \\ F_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)=0 \\ \qquad\vdots \\ F_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

を n **元連立方程式** という。　**n 元連立方程式**

また

$$\begin{cases} F_1(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n)=0 \\ F_2(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n)=0 \\ \qquad\vdots \\ F_m(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n)=0 \end{cases}$$

を満たす n 個の数の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ をこの連立方程式の **解** という。 **解**

(定義終)

注意

(1) この定義は最も一般的なものです。難しさを感じるかもしれませんが，まずはこんなものと思って先に進んでください。
また解とはどんなものかが定義されていますが，連立方程式に解が存在するかどうかは保証されません。言い替えると１元１次方程式のところでも少し触れましたが，方程式が解を持つかどうかは常に検討しなければならないことです。
中学校で出会った連立方程式は常に解が求められました。この後の節で解説しますが，実は連立２元１次方程式であっても，解を持たないようなものがあります。中学校のときには，慎重に選んだ連立方程式だけがみなさんに提供され，解き方の練習してもらっていたのです。

(2) 上では方程式の次数については触れていませんが，それぞれの方程式の次数の中でもっとも大きなものをこの連立方程式の **次数** といいます。

(3) いくつかの方程式を同時に満たすものを考えるということを強調するため，連立方程式は左側を中括弧 $\{$ で括ります。これが習慣です。

(注意終)

上の定義を嚙(か)み砕いて言い直すなら，要は「二つ以上の方程式を同時に満たす値の組を求めよ」というのが連立方程式で，その値の組をこの連立方程式の解というわけです。

で，以上を次のように読み替えれば，我々の扱いたい連立２元１次方程式の定義となります。

定義 (連立２元１次方程式)　二つの２元１次方程式 $ax+by+c=0,\ dx+ey+f=0$ の組

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$$

を **連立２元１次方程式** という。 **(定義終)** **連立２元１次方程式**

注意　２元１次方程式 $ax+by+c=0,\ dx+ey+f=0$ の係数 $a,\ b,\ d,\ e$ について何も言及していませんが，それぞれの方程式について係数は同時には０にならないという条件が課されています。 **(注意終)**

8.6.3　連立２元１次方程式——不定と不能

連立２元１次方程式はどうやって解いたでしょう？　これには二つの方法がありました。一つは **加減法** ，今一つは **代入法** と呼びました。 **加減法**

代入法

それぞれがどのような方法なのか簡単に復習しておくと，加減法というのは連立方程式

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$$

の一方あるいは両方に適当な数をかけて，未知数 x あるいは y の係数をそろえ，辺々を引くことによって一つの未知数を消去し，すでに知っている１元１次方程式の方法で解を求め，得られた値を上のいずれかの方程式に代入して消去した未知数の値を求めていく，というものでした。

また代入法というのは，上の二つの式の一方を一つの未知数について解き，それを今一方の式に代入して一つの未知数を消去する。以下は加減法と同様にして解を求めていくという方法でした。

これだけを見ると連立２元１次方程式はいつでも解けるように感じるかもしれませんが，先の注意でも触れたように必ず解けるかどうかは検討しなければいけません。このことは中学校のときにやっていません。

この検討は文字を係数とするものなのでかなり難しい。そこでこれについては補講で取り上げることにして，以下では中学校では出会うことのなかった特別なタイプの例を見ていきましょう。

例　連立方程式

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=2 \end{cases}$$

を考える。

いつものようにして解いてみましょう。加減法を用います。

第一式を２倍すると

$$6x+4y=2$$

でこれを第二式から引いてみると

$$0=0$$

となり，x も y も消えてしまいます。

これは問題を見た時点で気がつくべきでしたが，はじめに与えられた二つの式のうちの第二式の係数は全部偶数なので２で割り切れます。そこで２で割ってみると

$$3x+2y=1$$

となり，第一式と同じになります。つまり見かけ上は二つの式であったのですが，これらは同じ式だったのです。

ということは，先の節で説明した (連立でない) ２元１次方程式と同じであり，解は無数にあります。

この場合を「解は **不定** である」といいます。　**(例終)**　**不定**

例　先の例と同じような連立方程式ですが,

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$$

を考えましょう。今度は先の例と違って，第二式は第一式の２倍になっていません。しかし係数 (だけ) が２倍になっています。

そのことはちょっと置いておいて，先と同じように (第一式を２倍して引くという) 加減法で解きにかかると

$$0=1$$

となります。こんなことはありえません。

これはどう考えたらよいでしょう？

１元１次方程式を解いたときにちょっと触れましが，我々が方程式を解いてきたプロセスは「解があるとするとそれはこれこれの値である」ということを示したものでした。そして１元１次方程式の場合は，そのプロセスが同時に「それ以外の解はない」ことも示していました。

これは連立方程式の場合も同様で，我々が中学校のときに学習した解を求めるプロセスは，やはり「解があるとする」ことを出発点としています。

これを考え合わせると上のことは結局,「解があると仮定すると $0=1$ となる」ことを示したことになり，この結論は我々の常識に矛盾します。つまり仮定が誤りなのです[7]。

その仮定とは何だったかといえば「与えられた方程式に解がある」ということでしたから,「与えられた方程式には解がない」という結論を得ます。

つまり連立方程式

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=3 \end{cases}$$

には解がないのです。

このような場合を 「解は**不能** である」といいます。　**(例終)**　**不能**

以上をまとめると結局，２元連立１次方程式の解には

(１) 解を持つ

(２) 不定である

(３) 不能である (つまり解なし)

の三つの場合があることになります。

例題 25 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+5y=4 \end{cases}$

[7] このような議論の方法を「背理法」と呼びました

解説　上で解説したように，２元連立１次方程式の解には
　(１) 解を持つ
　(２) 不定である
　(３) 不能である
の三つの場合があります。
　でこの問題は，与えられたそれぞれの連立方程式が上のいずれであるかを問うています。
　しかし問題をみた瞬間にはどの場合なのか分からないかもしれません[8]。
　それゆえ今まで通り解きはじめるのです。

解答例　(１) は第一式を２倍すると

$$2x + 4y = 2$$

これを第二式から引くと

$$0 = 1$$

よって不能。
　(２) 第一式を２倍して第二式から引くと

$$0 = 0$$

よって不定。
　(３) 第一式を２倍して第二式から引くと

$$y = 2$$

ゆえに $y = 2$。
　第一式に代入して

$$x + 4 = 1$$

ゆえに $x = -3$。
　つまりこの方程式は解けて，解は $x = -3,\ y = 2$ である。　**(解答例終)**

練習 77 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 9x + 12y = 3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 5x + 15y = 15 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 8y = 5 \end{cases}$

---

[8]実は上の例をよく観察すれば瞬間的に判断できます。その方法はわざと書かないことにしましょう。ぜひ見つけてください。
　またその方法の裏付けは補講で行いました。補講を読むことで，皆さんの見つけた方法が正しいものかどうかを確認しておいてください。

8.7　２元１次方程式と直線

さて以上で方程式の代数的な面の話を終え，幾何的な側面の話に移りましょう。

8.7.1　直線の方程式

先に２元１次方程式 $ax + by + c = 0$ が無数の解を持つことに触れました。
その際 x あるいは y について解き，無数の解を持つこと示しました，
解は $(x_0,\ y_0)$ のような数の組で表すことができましたから，これを平面内の点の座標と考えてみましょう。こう考えて，２元１次方程式 $ax + by + c = 0$ の解をすべて座標平面内にとっていくと何らかの図形が描かれるでしょう。それはどのようなものになるのかを見ていきましょう。

さて，どうやって２元１次方程式 $ax + by + c = 0$ が無数の解を持つことを示したか，その方法を思い出してみましょう。それは与えられた方程式を一方の未知数について解くことによって示しました。
たとえば方程式 $2x + y - 1 = 0$ は y について解くことができて

$$y = -2x + 1$$

となります。
一般の場合においても，$b \neq 0$ ならば

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

と解くことができます。
まずはこの場合のみを扱いましょう。
こうして得られた

$$y = -2x + 1$$

や

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

という形の式にはすでに出会ったことがあります。
そう，これらは１次関数の形をしているのです。そこで (元々は方程式だったのですが) この式を１次関数を表すものと考えましょう。
するとそのグラフを考えることができます。
つまり与えられた１次方程式 $ax + by + c = 0$ に対して (今のところ $b \neq 0$ という条件つきですが) １次関数 $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ のグラフを対応させるのです。
１次関数のグラフは直線でしたから，１次方程式に対して直線が対応することになります。

逆に y 軸に平行でない直線があれば，それは１次関数 $y = ax + b$ のグラフと考えることができるので，１次方程式 $ax - y + b = 0$ が得られます。

$b \neq 0$ の場合でも特に $a = 0$ の場合を考えましょう。
この場合元の式は $by + c = 0$ となります。上と同じように変形すると

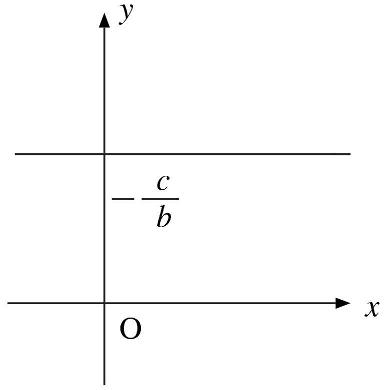
$$y = -\frac{c}{b}$$

この式は以下のように考えることによって関数と見なされます。
どんなものを関数と呼ぶのだったのかをちょっと復習しておくと，

定義 (関数)　変数 x の値を定めると，なんらかの規則によって変数 y の値が定まるとき，y は x の **関数である** という。 **(定義終)**　**関数**

でした。
この言い回しは大変抽象的なものでしたが，要点は「なんらかの規則によって，値 x に別の値 y が対応す」ればよいのです。そこでどんな値 x に対しても $-\frac{c}{b}$ という値が対応するという「規則」を考えましょう。するとこの対応は上の意味で関数になっています。
この関数はどんな x についても対応する y の値は常に同じ，すなわち一定です。そこでこの関数を **定数関数** といいます。 **定数関数**

それでは関数 $y = -\frac{c}{b}$ のグラフはどうなるでしょう？
この関数はどんな x の値に対しても $-\frac{c}{b}$ という値が対応するというものです。
つまり x が１だろうが -3 だろうが 100000 だろうが，どんな値に対しても $-\frac{c}{b}$ という値が対応するのです。
１次関数のグラフをはじめて描いたときと同じようにしてこれらの点をグラフ用紙にとっていくなら，これは次の図のようになるでしょう。



これから分かるように，グラフは x 軸に平行な直線です。
これは次のように考えることもできます。

１次関数 $y=ax+b$ の傾きは a でした。そして傾きとは x が１増えたときの y の増加量でした。
ここで関数 $y=\frac{c}{b}$ と式を比べるとこれは１次関数の a に相当する部分が 0 になったものと考えることができます。つまり x が１増えたときの y の増加量は 0 と考えられるわけです[9]。
一方１次関数のグラフは直線だったので，この関数のグラフも直線であり，１次関数の y 切片に相当する部分が $-\frac{c}{b}$ なので，このグラフは y 軸と $-\frac{c}{b}$ で交わることが分かります。よって上のようなグラフになることが結論できます。

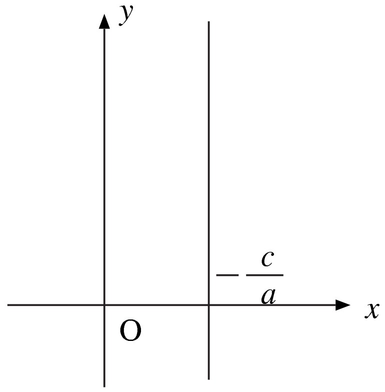
以上から「式 $y=ax+b$ で表される関数のグラフは直線である」とまとめることができます[10]。

次に $ax+by+c=0$ において $b=0$ の場合を考えましょう。
この場合元の式は $ax+c=0$ となります。
この式は上で取り上げた定数関数 $y=c$ と形がよく似ていますが，$ax+c=0$ は x の関数と考えることができません。
実際今の場合 $a\neq 0$ という条件があるので

$$x=-\frac{c}{a}$$

と，x について解くことができますが，これは x の値が一定値 $-\frac{c}{a}$ であることを示しており，いろいろな x の値を代入することができません。x に対応する値を考えることができないので， x についての関数とみなすことができないのです。
これは「ちょっと難しい話」(168 ページ) のところで触れたように，この式では (y が元々ないので) どんな y の値を代入しても成り立つと考えます。つまり y を任意の値とするとき， $\left(-\frac{c}{a},\ y\right)$ がこの方程式の解です。
そこでこれらの点を座標平面に書き込んでいきましょう。すると図のようになります。
これから分かるように y 軸に平行な直線となります。
つまり方程式 $ax+c=0$ には y 軸に平行な直線が対応しているのです。
以上のことから，代数的な対象である１次方程式 $ax+by+c=0$ に幾何的な対象である直線がうまく対応していることがわかります。
定理としてまとめましょう。

[9] $y=ax+b$ で $a\neq 0$ のものを１次関数と呼んだのですから，これはもうすでに１次関数ではありません。それゆえ１次関数の考え方を用いるのはちょっとまずいのですが，似たようなところがあることを示したかったのです。
[10]「１次関数」 $y=ax+b$ とは書いていないし，$a\neq 0$ という条件もついていないことに注意！



定理（2元1次方程式と直線)　2元1次方程式 $ax+by+c=0$ には座標平面上の直線が対応する。

実は上の定理の逆である次の定理も成立します。

定理（2元1次方程式と直線)　座標平面上の直線には1次方程式 $ax+by+c=0$ が対応する。

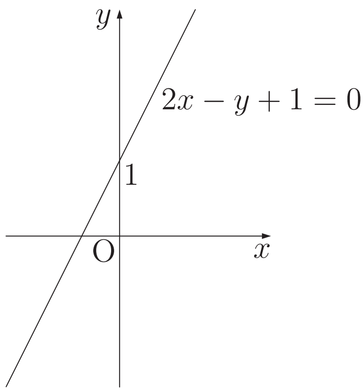
問 44 上の定理を証明せよ。
(**ヒント**：直線が x 軸に平行な場合，y 軸に平行な場合とそれ以外の三つに分けて検討せよ)

問 45 二つの方程式 $ax+by+c=0$ と $px+qy+r=0$ が同値ならば対応する直線は一致することを示せ。
(**ヒント**：a も b も0でないようなどんな方程式 $ax+by+c=0$ も $kx+y+l=0$ の形の方程式と同値である。また a, b のいずれかが0の方程式はどんな形の方程式と同値か？)

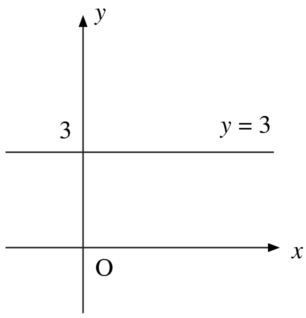
これら二つの定理の結果を踏まえて次のように定義します。

定義 (直線の方程式)　1次方程式 $ax+by+c=0$ を **直線の方程式** という。　**直線の方程式**
(定義終)

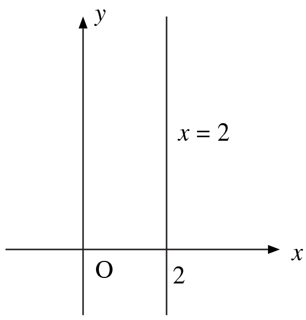
例　(1) 方程式 $2x-y+1=0$ に対応する直線。
与えられた方程式を変形すると $y=2x+1$ 。よって図のような直線が対応する。



(2) 方程式 $3y - 9 = 0$ に対応する直線。
与えられた方程式を変形すると $y = 3$。よって図のような直線が対応する。



(3) 方程式 $x - 2 = 0$ に対応する直線
与えられた直線を変形すると $x = 2$。よって図のような直線が対応する。



(例終)

練習 78 次の方程式に対応する座標平面上の直線を図示せよ。
(1) $3x + 6 = 0$　　(2) $x + y - 1 = 0$　　(3) $5y - 15 = 0$

8.7.2　連立２元１次方程式の図形的解釈

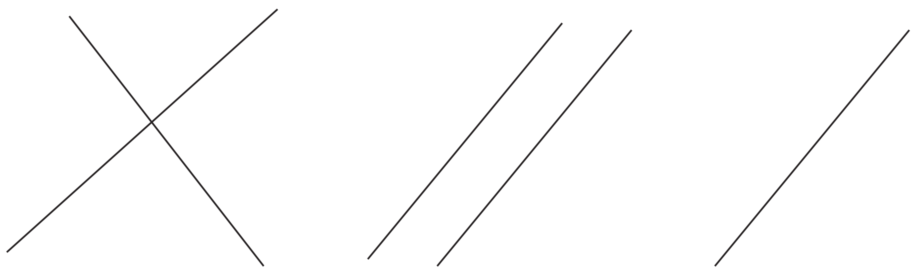
以上の議論によって，２元１次方程式には座標平面上の直線が対応することが理解できたことでしょう。

この考え方をさらに連立２元１次方程式に適用してみましょう。

先の節の冒頭で説明したように，２元１次方程式の解を点の座標と考えて座標平面上の取っていくと直線になりました。逆にいえば直線上の点は，その座標が与えられた方程式の解になっています。

連立２元１次方程式の場合式が二つあるので，２本の直線が得られます。これら２本の直線はどんな位置関係にあるでしょう？

２直線の位置関係については中学校のときにやっていますが，それは次の３種類に分類されます[11]。



交わる　　　　平行　　　　一致

連立方程式の二つの方程式から２本の直線が得られるので，これらは上に挙げた三つの位置関係のうちの一つとなります。

聡明（そうめい）な読者は上の三つが先に 172 ページでまとめた

(1) 解を持つ　　　(2) 不定である　　　(3) 不能である

の三つの場合とうまく対応していることに気がついていることでしょう。

実際「交わる」場合が (１) の「解を持つ」に,「平行」の場合が (３) の「不能」に,「一致」が (２) の不定に対応しています。

もう少し詳しく見てみましょう。

方程式に対応する直線上の点の座標はその方程式の解になっていました。２直線の交点はその２本の直線のいずれの上にもあります。つまり交点の座標は２直線を表す方程式のいずれの解にもなっています。つまり交点の座標は連立方程式の解になっているわけです。

[11]「一致」というのはなぜこんな場合を考えるのか，ちょっと納得しがたいものがあるかもしれませんが，後の説明を見れば納得できるでしょう。

２直線の交点はあったとしても一つしかないので，連立２元１次方程式の解があったとしても一つしかないことがこれからも納得できるでしょう。
また２直線が平行であるとは，交点を持たないことですから，連立方程式として解釈したとき解がないこと，つまり「不能」であるということになります。
さらに問 45 (176 ページ) で考えてもらったように，二つの方程式が同値であるとき２直線は一致します。またこの逆が成り立つこともすぐに分かるので，２直線が一致することが方程式の解が不定であることに対応することも分かります。

以上のように，連立２元１次方程式の解の状況と対応する２直線の位置関係がうまく関係していることが分かります。

ここまでの話は連立２元１次方程式のことでしたが，もう少し一般的に，考察の対象としている２元方程式の解を座標平面上の点の座標と考え，その点を取っていくなら一つの図形ができあがるであろうことが想像できるでしょう。そして連立方程式の解とそれに対応する図形の交点が対応していることも想像できるでしょう。
３元以上の方程式，あるいは２次以上の次数を持つ方程式でも同様のことが考えられます。単純な場合についてはこのシリーズの後のほうで取り上げるつもりでいますが，実はこのテーマは現在も多くの数学者が研究しているもので，現代数学の中心的な研究対象の一つになっています。

以上で連立２元１次方程式の図形的解釈についての説明を終えますが，後で使いたいので，最後に１元１次方程式 $ax+b=0$ の図形的な解釈にも触れておきましょう。復習を兼ねて問いの形で提示します。是非試みてください。

問 46 (1)　１元１次方程式 $ax+b=0$ の解 x_0 は，連立方程式

$$\begin{cases} y = ax+b \\ y = 0 \end{cases}$$

の未知数 x の値であることを確かめよ。

(2)　定数関数 $y=0$ はどのような直線か。

(3)　以上を総合して，１元１次方程式 $ax+b=0$ の解 x_0 は座標平面上のどこに現れているか，解釈せよ。

8.8　連立３元１次方程式

さて，連立方程式の最も単純な場合について，先の節まででー応一段落となりました。
これを発展させるには，

（1） 方程式の未知数を増やす方向
と
（2） 方程式の次数を上げる方向
の二つの方向があります。

こういった問題の立て方は数学の現実への応用はひとまず置いた，数学それ自身の興味からというタイプのものですが，後で段々理解できるように，このように一般化して解決しておいたものが日常生活，あるいは自然科学，工学において様々に適用でき，そこで解かなければならない課題を解決するのに役立つのです。

今後もこのような考え方，問題の設定の仕方が何度か現れてくると思うので記憶にとどめておいてください。

さてここでは（1）の方向，つまり未知数の数を増やす(ただし次数は１のままとする)方向へ一般化した問題を考えましょう。もちろんむやみに未知数の数を増やしてもいたずらに問題を複雑にするだけなので，一歩だけあゆみを進め，未知数が三つの場合，つまり連立３元１次方程式を考察することにします。

２元の場合と同様にして３元１次方程式とは

$ax + by + cz + d = 0$
(a, b, c, d は定数で，a, b, c の三つが同時に０になることはない)

と表されるものをいい，

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

満たす三つの数の組 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ をこの方程式の解といいます。

２元の場合と同様にして，この方程式が無数の解を持つことが示せます。

問 47 これを示せ。

注意　さらに２元１次方程式の場合と同じようにして３元方程式に対応する図形を考えることができます。それによって連立方程式の解の状況を推察することができ，うまく理論と対応することが分かります。

しかしそのためには「三つの数の組 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を座標とする点」とは何かを考える必要があります。これについての説明は今はしません。

が，後の方の章で必ず取り上げる予定です。興味のある読者はどのようなものと考えればよいのか，そのとき３元１次方程式 $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ にはどのような図形が対応するのかを皆さんなりに考えてみておいてください。 **(注意終)**

上のような事情のため，一般論は扱わず，必ずただ一つの解をもつ連立３元１次方程式だけを扱い，その解き方を習得してもらおうと思います。

例題 26 連立方程式

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ 4x + 2y - z = 24 \\ 3x + 4y - 3z = 21 \end{cases}$$

を解け。

解説　１元１次方程式は式が一つ，連立２元１次方程式は式が二つ，そしてここで例題として取り上げた連立３元１次方程式は式が三つであることにまず気がついてください。つまり連立３元方程式は式が三つないと解がただ一つに定まらないのです。

この事実は一般の場合にも成り立ち，連立 n 元１次方程式は式が n 個ないと解がただ一つに定まらないことが知られています[12]。

方程式の数が未知数の数より少ない場合もときどき入試問題で現れるので，機会があったら紹介することにし，まずはここで例示した問題に話をしぼりましょう。

さて，未知数が三つもあり，途方にくれてしまう状況ですが，このように新たな問題にであったときには，以前に出会った同じような問題で使えた方法がここでも適用できないかどうかを検討するのがまず出発点となります。

そして今の場合，連立２元１次方程式ではどうやったのかを思い出すべき場面なのです。

連立２元１次方程式では二つの方程式を使って —— 加減法，代入法の二つの方法がありましたが，そのいずれかの方法を用いて —— 二つの未知数のうち一方を消去しました。消去することによって方程式は１元となり，すでに知っている方法で解くことができたわけです。

すると今の場合，もし三つの方程式から未知数を一つ消去し，未知数が二つの方程式を二つ作ることができたら，すでに知っている連立２元１次方程式の解き方を適用することで，その二つの未知数の値を求めることができるでしょう[13]。

そして連立３元１次方程式の場合これはいつでも可能なことが知られています。

ここで挙げた例題では次のようにすればよい。

２元の場合と同じように式に番号をつけましょう。

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 & \cdots\cdots(1) \\ 4x + 2y - z = 24 & \cdots\cdots(2) \\ 3x + 4y - 3z = 21 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

今の場合 (2) 式を使うことで簡単に未知数 z を消去できます。

実際 (2) を２倍すると

$$8x + 4y - 2z = 48 \qquad \cdots\cdots(2)'$$

[12]もちろん連立２元１次方程式のときと同様に，式がそれだけの数あったとしても解がなかったり，無数に解を持つこともあります。

[13]もちろんできあがった二つの方程式の解が，元の方程式の解にもなっていなければいけません。しかしこれはこの後に示す解き方を検討することで簡単に示すことができます。

となり，(1) に加えると

$$10x + y = 53 \qquad \cdots\cdots(4)$$

次に (2) を 3 倍して (3) を引くと

$$9x + 2y = 51 \qquad \cdots\cdots(5)$$

こうして得られた二つの式 (4) と (5) には x と y の二つの未知数しか含まれていません。これで目的が達成できました。

後はこの二つを連立方程式と考えて x と y の値を求めればよい。

そして求まった x と y の値を (1)，(2)，(3) のいずれかに代入して ——これはどれに代入しても同じ値が得られます (確かめよ) —— z についての方程式を作り，それを解くことで z の値が得られます。

こうして得られた数の組 $(x,\ y,\ z)$ が元々の連立方程式の解になっているのです。

解答例　z を消去する (解説のように式に番号をつけておく)。

(1) + (2) × 2

$$10x + y = 53 \qquad \cdots\cdots(4)$$

また (2) × 3 − (3) より

$$9x + 2y = 51 \qquad \cdots\cdots(5)$$

(4), (5) を連立させて解くと

$$x = 5, \quad y = 3$$

これを (1) に代入すると

$$10 - 9 + 2z = 5$$

これを解いて $z = 2$。

$$(x,\ y,\ z) = (5,\ 3,\ 2)\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

問 48 上の数の組 $(x,\ y,\ z) = (5,\ 3,\ 2)$ が例題で与えられた連立方程式の解になっていることを確かめよ。

問 49 上の例題で，はじめに y を消去して解を求めよ。

練習 79 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y+z=19 \\ 2x+4y-3z=-21 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x-y=19 \\ 2x-5y-z=22 \\ 3x+y+z=12 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=-4 \\ z=x+y \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=3 \end{cases}$

これ以上未知数が増えても (手間は増えますが) 同様の方法で文字を減らしていけば，必ず解を求めることができます。

練習 80 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} 3x+2y+z-w=10 \\ 2x+y-z+w=6 \\ x-y+z+w=2 \\ x+y-z-w=2 \end{cases}$$