第9章　2次方程式の解法

9.0　はじめに

本章では2次方程式の解き方を解説します。

自然科学を研究していくと，必ず2次方程式に出会います。天体の運行や，物体の運動などを説明する，ニュートンが発見した力学の理論によると，様々な場面で2次方程式を解かなければならなくなります。また，後で紹介する2次関数にも出会います。

2次方程式は1次方程式と比べると大分複雑です。しかしそれだけ豊富な内容を含み，さらに次数の高い方程式の理論の雛型にもなります。

内容を簡単に紹介しましょう。

まず，2次方程式の定義を与えます。

次に中学校の復習をかねて，単純な形のものから徐々に複雑な形の2次方程式の解き方を検討していきます。単純といっても係数は「任意」にしてありますので，わかりにくいと感じる人は，具体的な数値を代入して読み進めてください。その上で，一般的な係数での議論が理解できたり，解くことができるようになってほしいと思います。

ここで紹介した方法は，一般の2次方程式，ひいてはより高次の3次方程式や4次方程式の解の公式を与えるヒントになっています。

これらを踏まえて，どんな2次方程式でも解ける解の公式を与えます。

一般的な形で公式を導いたので式変形に難しさを感じるかもしれません。将来理工学方面に進もうと考えている人は，是非自分で導き出せるようにもなっていてください。

解の公式を導くことは，結果が知られている現在ではそんなに困難なことではありません。重要なことはこのような公式が発見されたこと，どんな2次方程式も必ず解ける，ということです。

実は，ここに紹介する2次方程式に関するお話しは，数学的には完全なものではありません。ある程度完全なお話をするためには,「複素数」という考え方が必要になります。複素数については，後の章で取り上げ，そこでひとまず完全な形の2次方程式の理論を提示することになるでしょう。まずは，ここまでの章と同様に，2次方程式を自在に作り，解けるようになっておいてください。

9.1　２次方程式の定義

まずは２次方程式を定義しましょう。

定義（２次方程式）

$$ax^2+bx+c=0 \quad (\text{ただし } a,\ b,\ c \text{ は定数で } a\neq 0\ )$$

の形の方程式を **２次方程式** という。 **(定義終)** **２次方程式**

注意　上では単に「$a,\ b,\ c$ は定数」としましたが，後の議論の関係から今のところは実数であると考えておいてください。

２次方程式の理論を完全なものとするには「$a,\ b,\ c$ は複素数」として議論したいのですが，まだ複素数については何もいっていないのでできません。

しかしながら以下の議論は複素数の平方根についての理論ができあがれば，そのまま適用できるものです。複素数についての学習が終わったら，本章を読み直し，自分で理論を書き直してみてください。 **(注意終)**

定義（解，解く）　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に対して，$ax_0{}^2+bx_0+c=0$ を満たす数 x_0 を，この 2 次方程式の **解** という。 **解**

2 次方程式の解を **すべて** 求めることを，その方程式を **解く** という。 **(定義終)** **解く**

注意　1 次方程式の解は一つしかありませんでした。中学校のときに経験したことから，2 次方程式が 2 個の解を持つらしいことをご存知でしょう。しかし今のところ，一般の 2 次方程式がいくつの解をもつのかわかりません。以下の議論で，これらの結論がはっきりとします。 **(注意終)**

9.2　2 次方程式の解法

9.2.1　単純から複雑へ

新しい問題にであったときまずすることは，単純な特別な場合について検討することでしょう。そして徐々に複雑な形を扱うようにします。

その際，できるだけ単純な場合に用いた手法が使えるとかなり手間が省けます。

いつでもうまくいくわけではありませんが，こういったことを頭におきながら 2 次方程式の解き方を考えてみましょう。

9.2.2　$ax^2 = 0$ の場合

今私たちは，2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

を解きたいわけですが，もっとも一般の場合，すなわち a, b, c がどんな数であっても通用するものが存在するかどうかさえ知りません。

そこで上の方法を採用し，単純な特別な場合をまず考えてみましょう。

$$ax^2 + bx + c = 0$$

という式の中でもっとも単純なものとはどんな形をしているでしょう?　$b = c = 0$，つまり

$$ax^2 = 0$$

ですね[1]。

ここで a は任意，つまりなんでもよいとしていいですね。もしそれにも抵抗があるなら，$a = 1$ とした

$$x^2 = 0$$

を考え，次に $a = 2$ とした

$$2x^2 = 0$$

を考え…，というようにいくつかの場合を検討すればいいでしょう。

ここでは，もっとも単純である

$$x^2 = 0$$

からはじめましょうか。明らかと思える人は，$ax^2 = 0$ を検討しているところ (188 ページ) まで読み飛ばしてください。

さて，$x^2 = 0$ です。左辺は $x \times x$ ですから，

$$x \times x = 0$$

です。

この形をした定理を第 4 章「実数の性質」で紹介しています。再掲しましょう。

定理 (方程式解法の原理)

方程式解法の原理

(1)　$ab = 0$ ならば $a = 0$ または $b = 0$

あるいは同じことであるが，

(2)　$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ ならば $ab \neq 0$

この定理の (1) を用いると，

$$x = 0 \text{ または } x = 0$$

[1] a は 0 とすることはできません。定義に $a \neq 0$ としてあります。$a = 0$ とすると，これはすでに 2 次方程式ではなくなってしまいます。

となり，いずれからも $x=0$ という結論が得られます。
　また，$x \neq 0$ なら $x^2>0$ [2]，つまり $x^2 \neq 0$ ですから，これ以外の解はありえません。
　まず第一段階は成功ですね。
　次に $2x^2=0$ を検討しましょう。$2x^2=2\times x\times x$ ですから，もとの方程式は

$$2\times x\times x=0$$

となります。
　「方程式解法の原理」から

$$2=0 \text{ または } x=0 \text{ または } x=0$$

となります。
　「方程式解法の原理」は「$ab=0$ ならば $a=0$ または $b=0$」であって，三つの場合は書かれていない，と言う人もいるかもしれません。
　ちょっと脇道にそれますが，簡単に説明しておきましょう。次のような一般的な「方程式解法の原理」が成り立ちます。

定理 (一般的な方程式解法の原理)
　$a_1a_2\cdots a_n=0$ ならば $a_1=0$ または $a_2=0$ または $\cdots$ または $a_n=0$

　つまり「$a_1a_2\cdots a_n=0$ なら，a_1，$a_2,\cdots$，a_n のうちのどれかは必ず0である」ということです。
　今必要なのは，3個の数をかけた場合，つまり「$abc=0$ ならば $a=0$ または $b=0$ または$c=0$」ですが，これは次のようにして証明できます。まず $abc=(ab)c$ と考えて，私達の既に知っている「方程式解法の原理」を適用すれば

$$ab=0 \text{ または } c=0$$

となります。ここで $ab=0$ に対してもう一度「方程式解法の原理」を適用すれば，今の場合に使えることが判明します。
　一般の証明には数学的帰納法を用いることになるでしょう。数学的帰納法を知っている人は，証明を考えてみてください。

　さて，もとの議論に帰りましょう。もう一度 $2x^2=0$ の場合を書けば，

$$2=0 \text{ または } x=0 \text{ または } x=0$$

です。
　今明らかに $2\neq 0$ ですから，この場合はありえません。よって $x=0$ または$x=0$ となり，$x^2=0$ の場合となり，$=0$ という結論が得られます。この場合もこれ以外に解はありえません。

[2] この事実も「実数の性質」で示してあります。どこにあったか確認しておいてください。

二番目の例もうまく解決しました。
では 3 番目として $3x^2 = 0$ を考えましょうか?
みなさんが辟易(へきえき)している顔が思い浮かびますので，これ以上はここまでの議論に不安を感じる方に検討を促すだけにして，先に進みましょう。

ここまでの議論が x^2 の係数がどんなものであっても通用することが，想像できていればそれで十分です。
実際 $ax^2 = 0$ (ただし $a \neq 0$) についても，上の $2x^2 = 0$ と同じ議論ができ，結論として $x = 0$ を得ます。

問 50 $ax^2 = 0$ の場合の議論を書き下してみてください。

以上から次の結論を得ます。

$ax^2 = 0$ **は解けて，解は** $x = 0$ **のみである。**

読者の中には，3 個の数の「方程式解法の原理」を用いなくても，済むのではないかと思っている人もいるでしょう。
実際，今 $a \neq 0$ なので， $ax^2 = 0$ の両辺を a で割れば $x^2 = 0$ となり，一番最初の議論に帰着できるからです。
これは，たしかに簡単ですね。以下ではこの方法が使えるときには，採用しましょう。ただここで「方程式解法の原理」を使って見せたのは，後で何回かでて来るからです。複数の手法を持つことで，さまざまな解き方が得られますし，行き詰まりを突破するきっかけになることもありますので，頭の隅においておいてください。

9.2.3 $ax^2 + c = 0$ の場合

次に複雑な形の 2 次方程式はどんなものでしょう。$a = 1,\ b = 0$ の形，つまり

$$x^2 + c = 0$$

でしょうか。
本節では，この形の 2 次方程式を検討しましょう。
まずは c を移項して

$$x^2 = -c$$

となります。
ということは，x は 2 乗すると $-c$ となる数です[3]。言い替えれば $-c$ の平方根ですね。

[3] $-c$ には，$-$ がついていますが，負の数とは限りません。ご注意!

よって $-c \geqq 0$，つまり $c \leqq 0$ なら解があり，

$$x = \pm\sqrt{-c}$$

となります。

ここで $-c = 0$，つまり $c = 0$ なら，先に検討した $x^2 = 0$ の場合となっており，同じ結論が得られていることに注意しておいてください。

また $-c < 0$，つまり $c > 0$ なら，解は存在しません。

この場合から，2 次方程式の解の個数は少なくとも 2 個，1 個，0 個の三つの場合がありうることがわかります。

方程式をもう少し一般的にして a を任意にし，

$$ax^2 + c = 0$$

を検討しましょう。

まずは c を移項し，

$$ax^2 = -c$$

今 $a \neq 0$ ですから，両辺を a で割ることができて，

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

これで，$ax^2 + c = 0$ が上で検討した形に変形できました。よって上の結果を適用すれば，$-\dfrac{c}{a} \geqq 0$ のとき，この方程式は解 $\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ を持ち，$-\dfrac{c}{a} < 0$ のとき，解を持たないことがわかります。

9.2.4 $ax^2 + bx = 0$ の場合

次に簡単な場合は $c = 0$ でしょう。

この場合 2 次方程式は

$$ax^2 + bx = 0$$

となります。これは

$$x(ax + b) = 0$$

と因数分解できますから,「方程式解法の原理」から

$$x = 0 \text{ または } ax + b = 0$$

となります。

$ax + b = 0$ は 1 次方程式なので簡単に解け，結局

$$x = 0,\ x = -\frac{b}{a}$$

が解であることがわかります。この場合もこれ以外に解はありません。

9.2.5 $a(x+m)^2=n$ の場合

さて，他に特別な場合はあるでしょうか? ここまでの検討で，ほぼすべての場合が尽きているように見えます。では，これらから一般の 2 次方程式を解く手がかりは見つかるでしょうか。

そのためには，検討してきた方程式がなぜ解けたのか，その理由をいろいろと考えてみる必要があるでしょう。

まず $ax^2=0$ あるいは $ax^2+c=0$ の場合は，いずれも平方根の考え方に基づいて解いています。要するに

$$(\text{ある式})^2=(\text{定数})$$

の形に変形しているわけです。

ここから一般の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が

$$X^2=C$$

の形に変形できないかどうかを検討する道が考えられます。

もしこの形に変形できたとしたら，X はどんな式でしょう。もちろん X は x の整式です。では次数は?

もともと 2 次方程式，つまり左辺は x に関する 2 次式だったのですから，X は x に関する 1 次式のはずですね。よって $X=px+q$ が考えられます。

すると，もう一つ検討すべき形として $(px+q)^2=n$ が思い浮かびます。

これは $n\geqq 0$ のとき

$$px+q=\pm\sqrt{n}$$

となり，結局 x の 1 次方程式を解くことになります。これを解いて

$$x=\frac{-q\pm\sqrt{n}}{p}$$

を得ます[4]。

ところで，上では $X=px+q$ としましたが，x の係数である p は必要でしょうか?

$px+q=p(x+\dfrac{q}{p})$ と変形しておくと，

$$(px+q)^2=\left\{p(x+\frac{q}{p})\right\}^2=p^2\left(x+\frac{q}{p}\right)^2$$

となり，$X^2=C$ は

$$P(x+Q)^2=n$$

[4] $p\neq 0$ です。なぜか? 理由を考えてください (ヒント：$p=0$ とするとどうなりますか)。

を考えればよいことがわかります ($P = p^2,\ Q = \dfrac{q}{p}$ と置き換えをしています)。

このタイプのものをもう一度解いておけば，まず両辺を P で割って

$$(x+Q)^2 = \frac{n}{P}$$

となり，$\dfrac{n}{P} \geqq 0$ なら

$$x + Q = \pm\sqrt{\frac{n}{P}}$$

よって

$$x = -Q \pm \sqrt{\frac{n}{P}}$$

となります。

9.2.6　平方完成

さて，問題は $ax^2 + bx + c = 0$ が $P(x+q)^2 = n$ の形に変形できるか?　となりました。

もちろんこれでうまく解決するとは限りませんが，一つの道が見えてきているわけです。

はじめから一般的なものをやるのは難しいですから，$a = 1$ の場合を考えましょう。つまり

$$x^2 + bx + c = 0$$

がうまく変形できないか考えます。

しかしこのままでいくら考えても手がかりはでてこないでしょう。こういった場合には，変形できたとしたらどうなるはずか，を考えるのがコツです。

$$x^2 + bx + c = 0$$

が

$$(x+p)^2 = n$$

と変形できたとしましょう[5]。$p,\ n$ が，うまく b や c を用いて表現できたら成功です。

さて，

$$x^2 + 2px + p^2 = n$$

よって

$$x^2 + 2px + p^2 - n = 0$$

[5] x の係数は 1 としていいですね。理由は?

となります。これは $x^2+bx+c=0$ と一致するはずですから，

$$b=2p, \quad c=p^2-n$$

となります。

第一の式から

$$p=\frac{b}{2}$$

であり，これを二番目の $c=p^2-n$ に代入すると，

$$c=\frac{b^2}{4}-n$$

つまり

$$n=\frac{b^2}{4}-c$$

となります。

以上のことから，

$$p=\frac{b}{2}, \quad n=\frac{b^2}{4}-c$$

とおけば，$x^2+bx+c=0$ を $(x+p)^2=n$ の形に変形することができることがわかりました。

幸運にも，うまくいきましたね。

では，一般の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ についても同じ方法が使えるでしょうか?

$a \neq 0$ ですから，両辺を a で割って

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

と変形しておけばいいですね。

念のために，この場合の p や n を求めておけば，

$$p=\frac{b}{2a}, \quad n=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

です。第二の式は通分して，

$$n=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

としておきましょう。

$n \geqq 0$ のとき，この方程式は解を持ちました。$4a^2>0$ ですから，n の符号は b^2-4ac で決まります。つまり $b^2-4ac \geqq 0$ なら，もとの 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は解を持つことがわかります。

ふ〜う。大分長くなりましたが，ひとまず解決したようです。

節を改めて，定理の証明としてまとめましょう。

9.2.7　解の公式

前節で得られた結果と方法を用いて，一般的な 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を与える公式を証明しましょう。

定理（2 次方程式の解の公式）　係数が実数の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ で $b^2-4ac \geqq 0$ を満たすものは解けて，その解は　**解の公式**

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

また，$b^2-4ac<0$ のときには，解は存在しない。

証明　$a\neq 0$ なので，両辺を a で割って，定数項を移項しておくと，

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

両辺に $\dfrac{b^2}{4a^2}$ を加えると，

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

左辺は因数分解できる。実行すると，

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ここで $4a^2\geqq 0$ であり，仮定より $b^2-4ac\geqq 0$ なので，右辺は $\geqq 0$。ゆえに

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ なので，

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\dfrac{b}{2a}$ を移項して，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

実数 b^2-4ac の平方根が $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ しかないことから，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解が，これ以外にはないこともわかる。　**(証明終)**

注意　この定理の仮定である $b^2-4ac\geqq 0$ はちょっとうるさいですね。「複素数」という数の考え方を用いるとこの条件を外すことができます。これについては，後の章で紹介し，ある程度完全な理論として解説することにします。　**(注意終)**

問 51 証明中の「$\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ なので,

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

」の部分詳しく説明せよ。

例 $2x^2+x-2=0$ を解いてみましょう。
解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times(-2)}}{2\times 3} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{17}}{6} \end{aligned}$$

(例終)

例 $4x^2-4x+1=0$ を解きましょう。
解の公式より,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 4\times 1}}{2\times 4} \\ &= \frac{4\pm\sqrt{0}}{8} \\ &= \frac{4}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

この例では b^2-4ac に相当する数が 0 になっており，解は 1 個しかありません。このような場合を **重解** といいます。 **(例終)** **重解**

注意 上の方程式の左辺は因数分解でき,

$$(2x-1)^2=0$$

となります。左辺は $(2x-1)(2x-1)$ ですから,「方程式解法の原理」から

$$2x-1=0 \text{ または } 2x-1=0$$

よって

$$x=\frac{1}{2} \text{ または } x=\frac{1}{2}$$

を得ます。

この計算から，もとの方程式はたまたま一致した，つまり重なってしまった二つの解 $\dfrac{1}{2}$ を持つと考えられます。これが重解という理由です。 **(注意終)**

例　$x^2+x+1=0$ を解きます。解の公式より，

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times 1\times 1}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

$b^2-4ac=-3<0$ なので，解なし。 **(例終)**

注意　さきに注意した b^2-4ac というのは，解の公式中の根号内の式です。つまり根号の中が負になれば，解はないということです。 **(注意終)**

練習 81 解の公式を用いて以下の方程式を解け。

(1) $x^2+x-1=0$　　(2) $2x^2-x-1=0$

(3) $9x^2-6x+1=0$　　(4) $x^2+2x+2=0$

もう一つ例をあげましょう。

例　$2x^2-4x-1=0$ を解いてみます。復習をかねて，先を読む前にみなさんなりに計算してみてください。

さて解の公式より，

$$\begin{aligned} X &= \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{4} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

ここまでは問題ないでしょう。

最後の $\dfrac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4}$ は約分できますが，間違えずにできますか?

$$\frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

ですね。分子を 2 で括ってから，分母と約分します。 **(例終)**

実は x の係数が偶数のときには必ず約分ができます。これに関して次の定理が成り立つ。

定理（2次方程式の解の公式）　係数が実数の2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

通常の2次方程式の解の公式との違いを，よく見比べて掴(つか)んでおいてください。

この定理は与えられた2次方程式の x の係数が偶数なら，上の公式によって解を求めることができ，約分しなくて済むということを保証するものです。

問 52 上の定理を証明せよ。
(**ヒント：**機械的に元の解の公式を適用し，計算すると必ず約分できる形になるので，約分してみよ。)

例　$x^2+2x-3=0$ を解いてみよう。この例の場合 x の係数が2で偶数です。よって上の公式が使え，公式中の b' が $b'=1$ であることに注意すると

$$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\times 3}=-1\pm\sqrt{2}i$$

となります。

元々の解の公式を用いるとまず分数になるが，この公式を使うことではじめからそれが避けられます。そのおかげで大分計算が簡単になっていることに注目してほしい。

比較のために，元々の解の公式を使って解を求めてみてください。　**(例終)**

練習 82 次の方程式を解の公式を用いて解け。
(1) $3x^2+6x-1=0$　　(2) $2x^2-4x+3=0$

9.2.8　因数分解による2次方程式の解法

さて，解の公式については以上で終わりです。

解の公式は強力なもので，これだけあればどんな2次方程式でも必ず解くことができます。

しかし，方程式によっては解の公式を使わない方が簡単に求められることもあります。

そんな例が 9.2.4(189 ページ) に現れていました。

つまり ax^2+bx+c が因数分解できるときには,「方程式解法の原理」から簡単に解を求めることができるのです。

例を挙げましょう。

例　$x^2 - x - 2 = 0$

　この方程式も解の公式を使うことで解くことができます。しかし左辺は因数分解できることに注意しましょう。

　実際因数分解すると

$$(x-2)(x+1) = 0$$

となり,「方程式解法の原理」より

$$x - 2 = 0 \text{ または } x + 1 = 0$$

よって

$$x = 2,\ -1$$

(例終)

　この例のように，与えられた 2 次方程式が因数分解できるときには，因数分解してしまったほうが簡単に解けます。

　式をよく観察して因数分解できるかどうかを見抜き，因数分解を使うのか，解の公式を使うのかを見定めて解けるようになってください。

練習 83 次の方程式を解け。

(1) $x^2 + 5x + 6 = 0$　　(2) $x^2 + 8x + 16 = 0$

(3) $x^2 + 3x + 5 = 0$　　(4) $x^2 - 3x = 0$

(5) $3x^2 + 5x + 2 = 0$　　(6) $2x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$

9.3　判別式

　ここまでの練習で，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対しては，$b^2 - 4ac$ という量が重要なことが理解できたことと思います。

　この量には名前がついています。

定義 (判別式)　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して，

$$D = b^2 - 4ac$$

と書き，この 2 次方程式の **判別式** という。　**(定義終)**　**判別式**

　判別式を用いると，与えられた 2 次方程式が解を持つかどうかが「判別」できます。

系 (判別式)　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると，

(1) $D \geqq 0$ ならば，与えられた 2 次方程式は解を持つ。

(2) $D < 0$ ならば，与えられた 2 次方程式は解を持たない。

またこれを用いると，解の個数についても次のことがわかります。

系 (2 次方程式の解の個数)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，この方程式の解の個数は以下のようになる。
(1) $D>0$ ならば，2 個。
(2) $D=0$ ならば，1 個。
(3) $D<0$ ならば，0 個。

注意　この定理は逆も成り立ちます。つまり，

系 (2 次方程式の解の個数)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，以下が成り立つ。
(1) 解の個数が 2 個ならば，$D>0$。
(2) 解の個数が 1 個ならば，$D=0$。
(3) 解の個数が 0 個ならば，$D<0$。

上の二つをまとめると，

系 (2 次方程式の解の個数の条件)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，
(1) $D>0 \iff$ 解の個数は 2 個。
(2) $D=0 \iff$ 解の個数は 1 個。
(3) $D<0 \iff$ 解の個数は 0 個。

(注意終)

問 53「解の個数が 2 個ならば，$D>0$」を証明せよ。残り二つも証明せよ。

注意　与えられた方程式が $ax^2+2b'x+c=0$ の形をしているときには，b'^2-ac が判別の役割を果たします。この値はもとの方程式の判別式 D の 4 分の 1 に等しいので，

$$D/4=b'^2-ac$$

などとして用います。
対応する定理を書き下してみてください。　**(注意終)**

例　2 次方程式 $2x^2+3x-6=0$ の判別式を D とすると，

$$D=3^2-4\times2\times(-6)=9+48=57>0$$

よって，$2x^2+3x-6=0$ の解の個数は 2 個。　**(例終)**

例　2 次方程式 $x^2-8x+28=0$ の判別式を D とすると，

$$D/4=(-4)^2-1\times28=16-28=-12<0$$

よって[6]，$x^2-8x+28=0$ の解の個数は 0 個。 **(例終)**

練習 84 次の 2 次方程式の解の個数を求めよ。
(1) $3x^2-9x-5=0$ (2) $4x^2+12x+9=0$ (3) $x^2-3x+4=0$

一つ応用例を挙げましょう。

例題 27 2 次方程式 $x^2+(5-m)x-2m+7=0$ が重解を持つとき，m の値を求めよ。

解説 重解なのですから，系「2 次方程式の解の個数の条件」から判別式 D は 0 に等しくなります。D は m に関する 2 次方程式になりますが，これを解けばいいわけです。

解答例 判別式を D とする。与えられた方程式は重解を持つので $D=0$。
さて，

$$D=(5-m)^2-4\times1\times(-2m+7)$$

なので，

$$(5-m)^2-4\times1\times(-2m+7)=0$$

これを解くと，

$$m=-1,\ 3\ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 85 2 次方程式 $x^2+(2m+4)x+m+14=0$ が重解を持つとき，m の値を求めよ。

補注 この問題だけを見ると，問題のための問題のように感じられるかもしれません。しかし後で方程式を図形の性質を調べることに応用しますが，そのときにこの問題が意味を持ってきます。方程式が重解を持つことと，ある種の図形的な性質が成り立つことが対応しているのです。

「2 次関数」でその さわり をお見せし,「図形と方程式」というテーマで大きく展開してお見せします。 **(補注終)**

[6] x の係数が偶数なので D の代わりに $D/4$ を用いました。この方が計算が楽ですね。

9.4　さらに勉強するために

何度も書くようですが，ここまでのお話は 2 次方程式に関して大体半分位のものです。残りの内容については,「複素数」の話もこめて章を改め紹介致します。

本章の前半で，2 次方程式の解の公式を「発見」していく過程を少しくどいくらいに書いてみました。もちろん「私」が発見したものではありませんから，作り話でしかありません。それでも何かの助けになるだろうと思い，書いてみました。

2 次方程式の解の公式を発見していくなかで得られた二つの方法について，まとめておきましょう。

一つは与えられた方程式を

$$(x \text{ の } 1 \text{ 次式})^2 = (\text{定数})$$

という形に変形していく方法。

もう一つは与えられた方程式を因数分解するものです。

いつでも因数分解できるとは限らないので，後者は一般的な方法とは言えません。

前者は非常に一般的な方法であり，3 次方程式や 4 次方程式の解の公式を発見していくときに重要な方針となります。

方程式解法の歴史を辿(たど)ることは，現代数学への入門として恰好の教材となると思います。

そういったことに興味を持った人は

数 III 方式 ガロアの理論，矢ヵ部巌著，現代数学社，1976 年

を読んでみてください[7]。

この本は方程式の歴史を辿りながら，３次方程式の解の公式，４次方程式の解の公式からはじめ，５次方程式にはなぜ解の公式が見付からなかったのかまでを，繰り返しを厭(いと)わず，丁寧(ていねい)に解説されています。あまりにも丁寧に解説されていて，かえって読みにくくなっているところもあるようですが，歴史の持つ重みと数学者の執念といったものを感じさせてくれます。

ただし，本気でこの本を読むつもりなら，相当な覚悟が必要となるでしょう。なぜなら，530 ページ余りと非常に大部だからです。そして登場人物は早々に計算してしまいますが，その計算は自分でもやってみないと内容が理解できなくなるし，その計算には相当な時間がかかるでしょう (もちろん登場人物もそれなりの時間をかけて計算しているはずですが，当然のことながら，本ではそういった時間は省略されています)。しかし取り組んだだけのものが得られると思います。

---

[7]題名に「数 III 方式」とありますが，これはこの本が出版されたときのカリキュラムでの「数 III」であり，現在のカリキュラムの中の「数 III」ではありません。

ま，カリキュラムは改定されていますが，ここまでこのシリーズで紹介してきたことが身についていれば理解は可能であるとは思います。それでも後にも書いたように，相当な覚悟を持って取り組んでほしい。