第10章　１次不等式

10.0　はじめに

先の章で方程式の解き方について解説しましたが，本章では不等式をテーマとします。
方程式と似ているところ，異なっているところをしっかり観察してください。

10.1　不等式と解

いつものように，定義から始めましょう。

定義 (不等式)　$3x + 54 > 0$ のように，不等号 $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$ を用いて，数式の大小を表したものを **不等式** という。 **不等式**
等式の場合と同じように，不等号の左側を **左辺**，右側を **右辺** という。左辺と右辺をあわせて，**両辺** という。 **左辺** **右辺**
また，与えられた不等式を満たす x の値を，その不等式の **解** という。**(定義終)** **両辺** **解**

例　ある数 x から 4 を加えた数は，もとの数の 3 倍より小さいとしましょう。
これを式で表すと，

$$x + 4 < 3x$$

となります。
このとき，$x = 3$ とすると，

$$(\text{左辺}) = 3 + 4 = 7$$
$$(\text{右辺}) = 3 \times 3 = 9$$

$7 < 9$ は正しいので，$x = 3$ は不等式を満たしています。つまり $x = 3$ はこの不等式の解になっています。
しかし $x = 1$ とすると，

$$(\text{左辺}) = 1 + 4 = 5$$
$$(\text{右辺}) = 3 \times 1 = 3$$

$5 < 3$ は誤りなので，$x = 1$ は不等式を満たしません。つまり $x = 1$ はこの不等式の解ではありません。 **(例終)**

例　1 個 50 円の消しゴムを x 個と，1 本 80 円の鉛筆 y 本を買うと，代金は 500 円以上になるとしましょう。これを式で表すと，

$$50x + 80y \geqq 500$$

となります。

$x = 2,\ y = 5$ とすると，

$$(\text{左辺}) = 50 \times 2 + 80 \times 5 = 500$$

となり，不等式が成り立ちます。よって $x = 2,\ y = 5$ は，この不等式の解になっています。

一方 $x = 1,\ y = 2$ とすると，

$$(\text{左辺}) = 50 \times 1 + 80 \times 2 = 210$$

で，不等式は成り立ちません。 **(例終)**

練習 86 不等式 $6x - 1 > 4x + 1$ で，$x = 4$ は解か。また，$x = -2$ はどうか。

これらの例からわかるように，方程式のときと同じように，文字の値によって不等式が成り立ったり，成り立たなかったりします。

そこで方程式のときと同じように，解をすべて求めることをその不等式を **解く** といいます。 **解く**

1 次方程式の解は 1 個でした。2 次方程式の解は，係数の状況によって異なりましたが，最大 2 個でした。

いずれの場合も，解の個数は次数を越えていないことにご注意ください。

しかし不等式のときには，状況は大分違います。

問 54 第一の例の解を，あと二つ与えよ。

後でわかりますが，不等式は特別なものをのぞいて，無数に解を持ちます。次の例は，特殊なものです。

問 55 $x^2 < 0$ は解を持たないことを確かめよ。また，$x^2 + y^2 \leqq 0$ の解は $x = y = 0$ のみであることも確かめよ。

不等式にも，単純なものから，複雑なものまでさまざまなものがあります。いつものように，単純なものについて扱うことにします。

つまり，文字が一つで，1 次式になっているものです。

定義 (1 元 1 次不等式)　与えられた不等式を，展開，移項などの整理をすることによって，

$$ax + b > 0$$

(ただし $a,\ b$ は定数で，$a \neq 0$) などの形になるものを，**1 次不等式** という。　**1 次不等式**

(定義終)

注意　もちろん $ax + b < 0$ や $ax + b \geqq 0,\ ax + b \leqq 0$ なども 1 次不等式といいます。ここでは代表して，$ax + b > 0$ を挙げました。　**(注意終)**

以下のテーマは，1 次不等式の解き方，つまりすべての解を求める方法を紹介することです。

10.2　不等式の性質

1 次方程式を解くときに,「等式の性質」と呼んだ以下の性質を用いました。

定理 (等式の性質 ——その 1)

(1)　$A = B$ ならば $A + C = B + C$

(2)　$A = B$ ならば $A - C = B - C$

(3)　$A = B$ ならば $AC = BC$

(4)　$A = B,\ C \neq 0$ ならば $\dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{C}$

これと同様に，不等式を解くときには，第 4 章「実数の性質」で紹介した「不等式の性質」を用います。これは以下のようなものでした。

定理 (不等式の性質)

(1) $a > b,\ b > c$ ならば $a > c$

(2) $a > b$ ならば $a + c > b + c,\quad a - c > b - c$

(3) $a > b,\ c > 0$ ならば $ac > bc,\quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

(4) $a > b,\ c < 0$ ならば $ac < bc,\quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

(5) $a > b,\ c > d$ ならば $a + c > b + d$

(6) $a \geqq b$ かつ $a \leqq b$ ならば $a = b$

特に，この中の (2)〜(4) を用います。

もう一度書くと,

(2) $a > b$ ならば $a+c > b+c, \quad a-c > b-c$

(3) $a > b,\ c > 0$ ならば $ac > bc, \quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

(4) $a > b,\ c < 0$ ならば $ac < bc, \quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

となっています。上の「等式の性質」とよく見比べてください。よく似ていますね。しかし異なる性質もあります。

この中の (4) に注目しましょう。これは,

(4) $a > b,\ c < 0$ ならば $ac < bc, \quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

となっています。つまり

負の数をかけたり，割ったりすると不等号の向きが変わる

のです。はじめのうちは，特に間違えやすいので，ご注意!

10.3　1次不等式の解き方

「不等式の性質」を用いて，不等式を解いてみましょう。

10.3.1　1次不等式の解き方

例　$x+6 > 9$ を解きましょう。

左辺を x だけにするために,「不等式の性質」(2) を用いて，両辺から 6 を引くと,

$$x+6-6 > 9-6$$

これを整理すると,

$$x > 3$$

つまり 3 より大きな数は **すべて** 不等式 $x+6 > 9$ の解になっています。**(例終)**

注意　第 8 章「1 次方程式の復習」で触れたように，たとえば $x+6=9$ と $x=3$ は「等式の性質」を用いてお互いに他方に変形できます。

上の変形も同様で，$x+6 > 9$ と $x > 3$ は「不等式の性質」を用いて，お互いに他方に変形できます。よって，方程式の場合と同じように，$x > 3$ を満たす数だけが与えられた不等式の解であることが保障されます。

「不等式の性質」を用いて与えられた式を変形している限り，成り立ちます。つまり，この例だけでなく，以下の例でも同じことが結論できます。　**(注意終)**

注意　$x > 3$ を満たす数は無数にあります。それらすべてを表す方法は，この不等式「$x > 3$」以外にありません。そこで，$x > 3$ をもとの不等式の解を表す答えとします。

(注意終)

練習 87 次の不等式を解け。

(1) $x - 3 < 2$　　(2) $x - 2 \geqq -3$　　(3) $x + 1.2 \geqq 2.5$

(4) $x - \dfrac{3}{5} > -\dfrac{1}{2}$　　(5) $8 + x > 8$　　(6) $x + 3 \leqq 0$

例　$8x \leqq 24$ を解きましょう。

「不等式の性質」(3) を用いて，両辺を 8 で割ると，

$$\frac{8x}{8} \leqq \frac{24}{8}$$

これを整理して，

$$x \leqq 3 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(例終)

例　$-\dfrac{x}{3} \leqq 4$ を解きましょう。

「不等式の性質」(4) を用いて，両辺に -3 をかけましょう。不等号の向きが変わることに注意してください。

$$-\frac{x}{3} \times (-3) \geqq 4 \times (-3)$$

これを整理して，

$$x \geqq -12 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(例終)

練習 88 次の不等式を解け。

(1) $2x > 6$　　(2) $4x \geqq -16$　　(3) $-7x \leqq 35$

(4) $-3x < -24$　　(5) $4x \leqq 10$　　(6) $-\dfrac{x}{4} > \dfrac{3}{2}$

例　$4x + 6 > 2$ を解きましょう。

両辺から 6 を引いて整理すると

$$4x > -4$$

両辺を 4 で割って

$$x > -1 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(例終)

注意　段々1次方程式の場合とほとんど同じであることに気がついてきたことと思います。
方程式を解くときに **移項** ということばを使いました。これは，数や式を左辺から右辺，あるいは逆に右辺から左辺に移すことを表すことばでした。不等式の場合も同様のことばを使います。 **移項**

また方程式を解くときに移項すると，数や式の符号が変わりました。これは「整式の性質」(1) と (2) によっておこるのでした。

不等式の場合は同様の性質の「不等式の性質」(1) があるため，やはり移項すると符号が変わります。 **(注意終)**

例　$3x - 9 \geqq 6x$

9 と $6x$ を移項して，

$$3x - 6x \geqq 9$$

整理すると，

$$-3x \geqq 9$$

両辺を -3 で割ると，

$$x \leqq -3 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(例終)

練習 89 次の不等式を解け。

(1) $2x + 3 > 5$　(2) $4x - 4 < 4$　(3) $3x + 13 \geqq 7$

(4) $4x - 5 \leqq 3x$　(5) $2x - 9 \geqq 5x$　(6) $3x > 8x - 25$

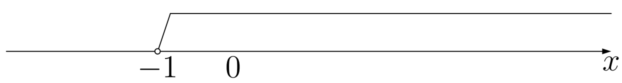
(7) $2x - 0.9 < 1.5$　(8) $\dfrac{x}{3} - 3 \leqq -1$　(9) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{5}x \geqq \dfrac{1}{3}x$

10.3.2　不等式の解と数直線

不等式を解くことに，大分慣れてきたでしょうか?

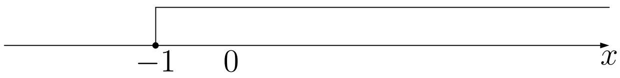
後の節で連立不等式や，2次不等式の解き方を紹介しますが，それらで解をまちがいなく表現できるように，数直線を用いた解の表し方を紹介しておきましょう。

たとえば，不等式の解が $x > -1$ となったとしましょう。このとき数直線を用いて，下の図のように表します。



少し小さいのでわかりにくいかもしれませんが，数直線上の解の左端の点は○になっています。

これが $x \geqq -1$ なら，



のように，●にします。

練習 90 練習 89 の解を数直線上に表せ。

10.4　不等式の応用

不等式の応用例として，次の例題をやりましょう。

例題 28 2 次方程式 $2x^2 - 3x + (m+3) = 0$ が解を持つような m の値の範囲を求めよ。

解説　第 9 章「2 次方程式の解法」で次の定理を証明しました。

系 (判別式)　2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると，
(1) $D \geqq 0$ ならば，与えられた 2 次方程式は解を持つ。
(2) $D < 0$ ならば，与えられた 2 次方程式は解を持たない。

ここで判別式 D は $D = b^2 - 4ac$ で定義される値です。

例題で与えられている方程式は $2x^2 - 3x + (m+3) = 0$ で，この方程式の判別式は，

$$D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (m+3)$$

です。よって上の系から，不等式

$$9 - 8(m+3) \geqq 0$$

を得ます。後はこれを解けばよいわけです。

解答例　与えられた方程式の判別式を D とすると，

$$D = 9 - 8(m+3)$$

もとの方程式が解を持つための条件は $D \geqq 0$ なので，

$$9 - 8(m+3) \geqq 0$$

を得る。これを解いて，

$$m \leqq -\frac{15}{8} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 91 2次方程式 $(2k+1)x^2+2x-3=0$ が解を持たないような，k の値の範囲を求めよ。

10.5 連立不等式と解

続いて，連立不等式の話をしましょう。

まずは最も一般的な定義から。

定義 (連立不等式) いくつかの不等式 $F_1>0,\ F_2>0,\ \cdots,\ F_n>0$ を中カッコでくくったもの

$$\begin{cases} F_1>0 \\ F_2>0 \\ \quad\vdots \\ F_n>0 \end{cases}$$

を **連立不等式** という。

これら n 個の不等式を同時に満たす数をこの **連立不等式の解** という。

さらに，すべての解を求めることを，その連立不等式を **解く** という。**(定義終)**

連立不等式

連立不等式の解

解く

ここでは具体的な問題として，連立の１次不等式について説明します。ただし，——方程式の場合と異なり——未知数は１個の場合のみを扱います[1]。

注意 連立でない不等式には必ず解がありました。しかし，連立１次方程式のときと同様，解を持たない連立不等式もあります。具体的な例は以下で示しましょう。 **(注意終)**

10.6 連立不等式の解き方

私達がここで取り上げるのは，いずれの不等式も１次のものだけです。

[1]未知数の数が二つ以上ある連立不等式については，その解き方は——１次の場合は解決しているようですが２次以上では——まだあまりはっきりしていません。

10.6.1　連立不等式の解き方

　例を挙げて説明しましょう。

例　連立不等式

$$\begin{cases} 2x+3 \geqq 1 \\ x+3 < 4 \end{cases}$$

は，$2x+3 \geqq 1$ と $x+3<4$ の両方を満たす数 x を求めよ，というものです。$2x+3 \geqq 1$ を解くと $x \geqq -1$，$x+3<4$ を解くと $x<1$(これらも自力で解いておくように)。

　よって「$x \geqq -1$ かつ $x<1$」を満たすすべての数が解である。これは通常 $-1 \leqq x < 1$ とあらわします。　**(例終)**

　この例からおわかりのように，連立不等式を解くには，与えられた不等式をそれぞれ解き，その両方を満たす部分をみつければよいのです。

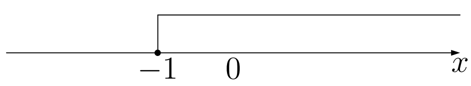
　しかし慣れないと，両方を満たす部分をみつけるのはちょっと難しさを感じるかもしれません。それを少し軽減するには，数直線を用いるのがいいでしょう。

　上の例で説明しましょう。

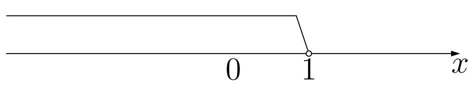
　上の例の不等式の解はそれぞれ，$x \geqq -1$ と $x<1$ でした。

　それぞれを数直線で表してみましょう。

　$x \geqq -1$ の方は,

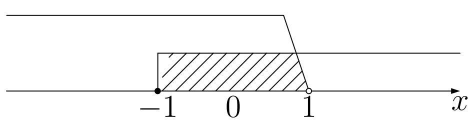


　$x<1$ の方は,



となります。

　今この二つの両方を満たす数をみつけたいので，上の二つの図をあわせてみます。すると,



となります。図で斜線の入った部分が両方を満たす部分です。

　図を描かなくても解の不等式が書けるなら，それにこしたことはありません。

ちなみに，数直線上の重なった部分はそれぞれの不等式の解を集合と考えたときの，共通部分になっています。「集合」で紹介した，二つの集合 A と B の共通部分 $A \cap B$ の図を思いだしてください。円と直線の違いはありますが，意味としては同じです。

連立不等式の解にはいくつかのパターンがあります。その他の例を挙げましょう。

例　今度は連立不等式

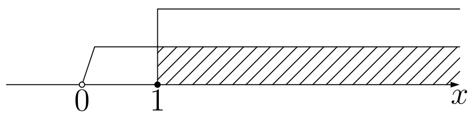
$$\begin{cases} 3(2x-1) > 4x-3 \\ x-1 \leqq 5(x-1) \end{cases}$$

を解きましょう。

$3(2x-1) > 4x-3$ を解くと，$x > 0$。$x-1 \leqq 5(x-1)$ を解くと，$x \geqq 1$。

この両方を満たす数は $x \geqq 1$ となります。

これはちょっとわかりにくいかもしれません。解を数直線上に表してみましょう。



先の例と同じように重なっているところを探すと，ちょうど $x \geqq 1$ の部分になっていることがわかります。これから，この連立不等式の解が $x \geqq 1$ であることがわかります。　**(例終)**

練習 92 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 6x-1 > 2x+4 \\ 3x+5 \leqq 6x-4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{4-2x}{3} > \dfrac{2+x}{2} \\ 3x-5-\dfrac{2x-1}{3} \geqq -6 \end{cases}$

例　もう少し特殊な例を挙げましょう。

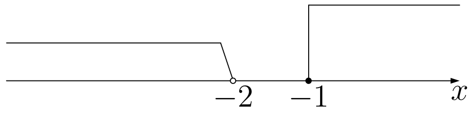
連立不等式

$$\begin{cases} 2(2x+7)-3(-3x+1) \geqq -2 \\ -4(-2x+4) > 5(3x-1)+3 \end{cases}$$

を解いてみましょう。

まず $2(2x+7)-3(-3x+1) \geqq -2$ を解くと $x \geqq -1$，$-4(-2x+4) > 5(3x-1)+3$ を解くと $x < -2$ となります。

最後に得られた二つの不等式 $x \geqq -1$ と $x < -2$ を満たす数とはどんなものでしょうか。わかりにくいですから，図にしましょう。



この連立不等式の解は，上の図の重なった部分になるはずですが，明らかにそのような部分はありません。つまりこの二つの不等式を同時に満たすような数 x は存在しないのです。

よってこの連立不等式の解はありません。

これを「解なし」といいます。 **(例終)**

例　もう一つ特殊な例を挙げておきましょう。

連立不等式

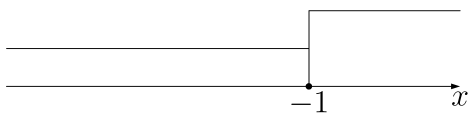
$$\begin{cases} 2(2x+7)-3(-3x+1) \geqq -2 \\ -4(-2x+3) \geqq 5(3x-1) \end{cases}$$

です。

まずはそれぞれの不等式を解きましょう。

前者は先の例と同じなので，解は $x \geqq -1$。後者は $x \leqq -1$ となります。

この例の場合，ちょうど -1 の所だけが重なっています (●はその数が解であることを表していたことに注意してください!)。



よってこの連立不等式の解は $x=-1$ となります。 **(例終)**

注意

(1) この例からも分かるように，不等式の解が常に不等式で表されるものとなるわけではありません。

(2) この例で後者の不等式が $-4(-2x+3) > 5(3x-1)$ だったらどうでしょう。この解は $x < -1$ となり，-1 は解となりません。よって「解なし」となります。

(注意終)

練習 93 次の不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 2x+1 > 3(2x-1) \\ 3x+5 > x-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 6x-1 \leqq 2x+4 \\ 3x+5 \leqq 6x-4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+5 \leqq 6x-4 \\ 6x-1 < 2x+4 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} -6x+2 \leqq 3x-1 \\ 5(x-1) \leqq 2(x-2) \end{cases}$

10.7　さらに勉強するために

すらすらと不等式が解けるようになったでしょうか？

不等式が解けるようになると，これから様々な話に応用ができるようになります。方程式の場合と同様，不等式を解くこと自体は背景に引き，ある種の問題を解こうとするときに不等式が得られ，それを解くことによって元の問題が解決する，という使い方をすることになるでしょう。

文字が増えた場合の連立不等式については，未解決の問題も多いようです。特に未知数が二つ以上の連立１次不等式の問題は **線形計画法** と呼ばれ，1940 年代ころから研究が盛んになり，いまだに研究が続けられています。興味のある読者は上のキーワードで本を探してみるといいでしょう。 **線形計画法**