第11章　１次関数の復習

11.0　はじめに

本章では関数の初歩を解説します。その方法として，中学校で学習した１次関数を復習するという形を取りました。しかし単なる復習ではありません。

次の章で２次関数の性質を解説しますが，２次関数に比べると性質の単純な１次関数を題材に，関数における基本的な手法，扱い方を紹介し，慣れてもらうことを目的としているのです。よって，中学校のときと異なり――他の章と同様に――かなり数学的に厳密に扱うことをしました。

また一方で――普段の授業において――関数について苦手意識を持っている人も多いという感触も持っているので，関数とは何か，なにゆえわかりにくいのか，また関数の性質を調べる基本的な方法にグラフを描くというものがありますが，グラフを描くにはどのような方法が取られているのか，中学校のときにあいまいにしたのはどんなことなのか，について詳しく説明しました。

関数についての勉強は始まったばかりです。数の計算や式の計算とは違って，まだまだなじみの薄いものでしょう。そういったことから関数とはどういったものなのか，わかりにくいと感じられるのだろうと，思っています。それゆえ，まずはいろいろなタイプの関数を見聞し，その中から関数とはこんなものなのだという皆さんなりの感触をつかんでもらいたいと思います。

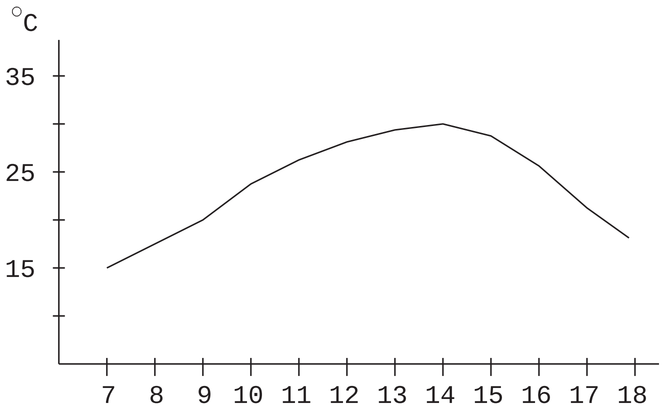
高い峰，そしてすばらしい景色を持つ関数山脈への長い登山がこれから始まります[1]。

11.1　関数とは何か

11.1.1　ともなって変わる二つの量

小学校の理科の時間に，気温の測定といったことをやったことがあるでしょう。そのときには，１時間おきくらいに気温を測り，折れ線グラフにしていったことと思います。同じようなグラフを，毎日テレビの天気予報などで翌日の予想気温の変化というような形で見ていることでしょう。

[1]そしてこの山脈は極め尽くされていません。まだまだ前人未踏の山々がたくさん残っています。



時刻が刻々と変化するに連れて，気温は変化します。「〜に連れて」というところに注目してください。

別の例を挙げましょう。

一辺の長さが x cm の立方体の体積を考えましょう。体積を y cm^3 とするならば，$y = x^3$ と計算することができます。
この例の場合，一辺の長さを決めると，体積が決まります。

このように二つの量（はじめの例でいえば時刻と気温，後の例でいえば立方体の一辺の長さ x とその体積 y）の間に何らかの関係があるものは，われわれの身の回りに結構あります。
これらの大きな特徴は，一方の量を定めると，それに応じたもう一つの量が定まってくるというところにあります。こういったものを数学できちんと取り扱うことができるように，言葉を定めましょう。

定義 (変数)　上に挙げた立方体の一辺の長さ x や体積 y のように，いろいろな値をとるような文字を **変数** という。 **(定義終)**　**変数**

定義 (関数)　変数 x の値を定めると，なんらかの規則によって変数 y の値が定まるとき，y は x の **関数である** という[2]。　**関数**
また y が x の関数であるとき，x によって y が決まってくることを意識して，x のことを **独立変数**，y のことを **従属**（じゅうぞく）**変数** ということがある。 **(定義終)**　**独立変数**
従属変数

例　立方体の体積は，その一辺の長さの関数になっています。このとき一辺の長さが独立変数で，体積が従属変数です。 **(例終)**

[2]「y は x の関数である」という言い方は，日本語としてはちょっと変なのですが，このようにいうのが数学の習慣となっています。

そこでわれわれは，関数の関係にある二つの量について考察したい。
ですがこの定義では，二つの変数の間にどのような関係があるのかさっぱり分かりません。
もう一度上の二つの例で説明をするなら，立方体の一辺の長さと体積の間は，その関係が式で表現されますが，時刻と気温のように（今現在では）式では表現できないようなものもあります。しかし式で表現することはできないが，何らかの関係があることだけはなんとなく想像できます[3]。
つまり関数には，二つの変数の間に何らかの関係があることが想像できるものの，どのような式でそれが表現されるのかがわからないようなものと，きちんと式で表現できるようなものがある，わけです。
以上のことから，関数について考察することは二つの段階に分かれます。

(1) 関係のありそうな二つの量を見つけ，その間の関係式を求めること。
(2) その関係式からわかる，関数の性質を調べること。

（1）に関することは，今すぐに取り掛かることは難しい。また数学の範囲からはみ出てしまう部分もあります。
そこでまず（2）から始めましょう。つまり，二つの変数の間を結びつけている関係式をまず与え，その性質を調べていくのです。そして関数とはどのようなものなのか，イメージを作り，その上で，新しい関数を探していくことにしましょう。

関数というものを研究する価値について，いま少し補足をしておきましょう。
もしある量の間に関数関係があることがわかり，それを表す関係式が求められたとします。たとえば，そういったものの例に，星の運行があります。つまり，考えようと思っている星（たとえば月）の位置は，時刻の関数になっており，式できちんと表現することができます（どのような式で表されるのかは，天文学などの文献で調べてください）。すると，将来のある時刻においてその星がどこにあるのか，完全に決まっており，それを応用することで，たとえば満潮や干潮の時刻がわかったりします。
台風や地震などのときに,「満潮の時刻と重なるので注意が必要です」といったように報じられることがありますが，これは上のように満潮の時刻がわかっているからできることで，これによって起こりうる被害を小さくする可能性がでてきます。
このような応用があるので，関数というものに注目し，われわれはその性質を調べていくのです。

注意　ここでは，二つの量 x と y の関係だけを扱いますが，自然現象で，ある量 y がただ一つの量 x のみで決まるような関係は，あまり多くありません。むしろ，いくつかの量 $x_1, \cdots x_n$ によって y が決まるという状況の方が普通です。

[3]もし時刻と気温の関係を表す式が見つかれば，ノーベル賞ものです。これは研究に値するテーマであるし，最先端では今現在もそれに向かって日夜多くの人が研究を続けています。

このような関数を扱う理論も存在し，大学で学習できます。その一部については，本書の後半で紹介する予定です。 **(注意終)**

11.1.2 関数の表し方

関数を表す記号を紹介しましょう。

定義 (関数を表す記号) y が x の関数であるとき

$$y = f(x)$$

と書く[4]。 **(定義終)**

注意 関数とは変数 x の値に応じて変数 y の値が定まってくるもののことをいいました。そこには対応の規則のようなものがあると考えます。その規則を象徴的に $f(x)$ という記号で表したと考えてください。もちろんそれだけでは調べようがないので，対応の規則として —— しばらくの間は —— 整式を考えます。つまり，値 x に対して，それを x についての整式に代入することで，y の値が定まる，という規則を考えるのです。

(注意終)

例 一辺の長さが x cm の立方体の体積を y cm^3 とする。$f(x) = x^3$ とおくと，$y = f(x)$ である。

一辺の長さが 2 cm の立方体の体積は

$$f(2) = 2^3 = 8$$

より，8 cm^3 である。 **(例終)**

練習 94 y が x の関数であって，$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ であるとき，次の値を計算せよ。

(1) $f(1)$ (2) $f(-2)$ (3) $f(a)$ (4) $f(-b^2)$

11.2 1次関数

11.2.1 1次関数

先の節で述べたように，われわれは二つの変数の間を結び付けている関係式が与えられているものから，話を始めます。しかしながら，はじめから複雑な関係

[4]関数を英語で function といいます。それゆえ $f(x)$ という記号を使っています。

式を持つものを考えようとしても，何を調べたらよいのか見当もつかないことでしょう。

そこでわれわれは，単純な関係式で結び付けられている関数から話を始めます。

では単純な関係式とはどのようなものでしょうか。

y が x の関数であり，それが $y = ax + b$ という式（a, b は定数）で表されるようなもの，つまり 1 次関数 ですね。

この順番は，方程式や不等式について解説をしたときと同様です。

ところで 1 次関数については中学校で大分勉強してきていることでしょうが，以下で復習をし，さらに後で使うさまざまな性質についてまとめ，記憶を新たにしておいてもらいましょう。

定義 (1 次関数)　y が x の関数であって，

$$y = ax + b \quad （ただし\ a,\ b\ は定数で，a \neq 0）$$

と表されるとき y は x の **1 次関数である** という。 **(定義終)**　**1 次関数**

注意　y が x の 1 次式として表されるので，1 次関数といいます。

ということは，y が x の n 次式で表されるようなものを n 次関数というのだろう，という連想が働くでしょう。そのとおりで，より複雑な関数の例として，後で扱うことになります。 **(注意終)**　**n 次関数**

11.2.2　比例関係

1 次関数の特別なものとして，$y = ax$ があります。定数 b が 0 になったものです。

この関係式は自然科学において頻繁（ひんぱん）に現れるので，名前がついています。

定義 (比例)　y が x の関数で，

$$y = ax \quad （ただし\ a\ は\ 0\ でない定数）$$

と表されるとき，y は x に **比例する** という。　**比例する**

このとき定数 a を **比例定数** という。 **(定義終)**　**比例定数**

例　電気に関する基本的な法則にオームの法則というものがあるが，これは　**オームの法則**

流れる電流は電圧に比例する

というもので，電流を I ，電圧を V ，比例定数を R とするとき

$$V = RI$$

と表される。そしてこの比例定数を電流を通す導体(どうたい)の抵抗という。 **(例終)**

問 56 比例関係にある二つの量の例を三つ挙げよ。
(**ヒント**：理科の教科書を調べてみてください。)

11.3 関数とグラフ

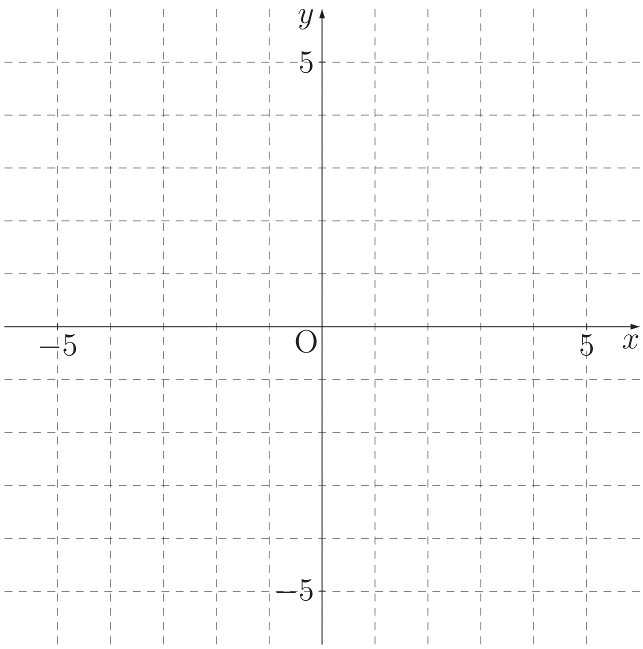
11.3.1 座標

関数の性質を調べるとき，そのグラフを描くのがもっともオーソドックスな方法です。その準備として，座標について復習しておきましょう。

2 本の数直線を原点で直角に交わるようにおき，その交点を O と呼びましょう (図参照)。そして，横の数直線を x **軸**，縦の数直線を y **軸**，二つをあわせて **座標軸** といいます。さらに点 O を **原点** といいます。

x 軸は，正の方向が右を向くように，y 軸は正の方向が上を向くように取るのが習慣になっています。

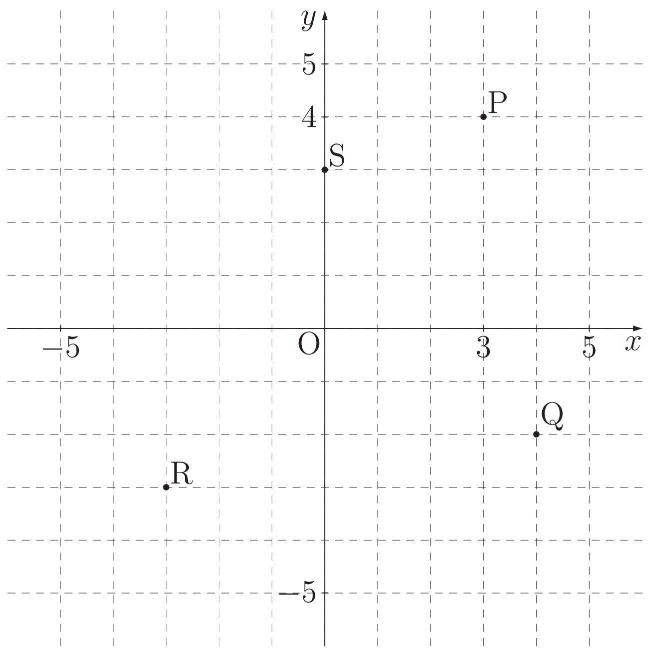
x 軸
y 軸
座標軸
原点



注意 上に書いたように，図のように x 軸や y 軸の方向を定めるのは **習慣**です。

実際，x 軸の正の方向が左を向き，y 軸は正の方向が上を向くように取るような図を描いて理論を展開してもまったく支障がありません。つまり座標を定める際にどちらを採用しても，理論的には問題がないのです。そして人によってどちらを使うのか，選択は任されているのですが，お互いに話をする際に混乱を生じさせないようにするために，このような習慣となりました。

上で定義したような座標軸の取り方を **右手系**，この注意で定義したような座標軸の取り方を **左手系** といます[5]。 **(注意終)** **右手系** **左手系**



座標を使って，図の点 P の位置を表すには，まず P から x 軸，y 軸にそれぞれ垂線を下し，座標軸と交わる点の目盛りを読みます。すると，上の図の場合は x 軸のほうの目盛りは 3，y 軸のほうは 4 と読み取るとができるでしょう。こうして得られた数の組 (3, 4) で点 P を表すことにします。

(3, 4) を，点 P の **座標**[6]，3 を P の x **座標**，4 を P の y **座標** といい，P(3, 4) と表わします[7]。 **座標** x **座標** y **座標**

点を座標を用いて表すときには，x 座標を先に書くのが習慣なので注意してください。

練習 95 上の図で，点 Q, R, S の座標をいえ。

また，次の座標を持つ点を書き入れよ。

A (1, 4)，B(−2, 1)，C(3, −2)，D(−3, 0)

---

[5]右手系という名前は，手のひらを上にして右手の親指と人差し指を L 字形に伸ばしたとき，親指が x 軸，人差し指が y 軸に相当するところからきています（実際に指を伸ばし，よく観察してください)。

[6](3, 4) は「3 カンマ 4」と読むように。

[7]数直線のときは A(a) などと表しました（第 4 章「実数の性質」参照)。

座標軸を考えた平面のことを **座標平面** ということがあります。今後使いたい言葉なので，ついでに記憶しておいてください。 **座標平面**

次の事実は重要です。

座標平面上のどんな点も，二つの数の組 $(x,\ y)$ **で表すことができる。**

11.3.2　1 次関数のグラフ

座標平面を考えると，それによって関数のグラフを描くことができます。

中学校のときにすでにグラフの描き方を勉強しており，1 次関数のグラフが直線になることも知っていると思うので，結果のみ示し，ポイントを押さえていくことにしましょう。

ただ，今後はじめて出会った関数のグラフを描くとき，その描き方を知らないと困ることもあるので，はじめに一般的なグラフの描き方を説明し，次に 1 次関数を例にグラフの描き方を復習しておくことにします。

一般的なグラフの描き方がわかりにくく感じる人は次の説明を飛ばして，1 次関数のグラフの描き方のみを復習しても構いません。

さて，上に説明したように，座標平面上の点は二つの数の組 $(x,\ y)$ で表すことができます。

そこで二つの数の組全体の集合を $\mathbb{R}^2$ と表すことにしましょう[8]。つまり

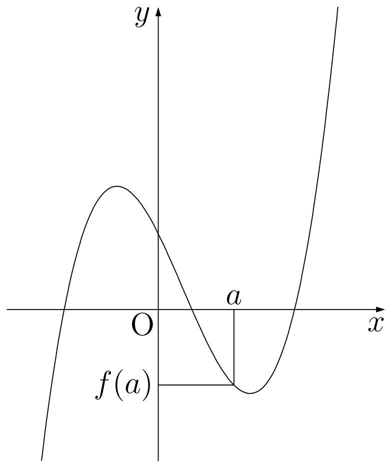
$$\mathbb{R}^2 = \{(x,\ y) |\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

このようにおくと，座標平面は $\mathbb{R}^2$ のことであると考えることができます。

次に関数 $y = f(x)$ を考えましょう。これは $x = a$ という値に対して，$y = f(a)$ という値が対応していることを表しています。そこで，組 $(a,\ f(a))$ を考えましょう。これは座標平面上の点を表しています。

そしてこのような組で表される点全部を座標平面上に書き込んでいきます。するとなんらかの曲線を描くことになるでしょう（図を参照）。

[8]実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表すことにしたのでした。
また $\mathbb{R}^2$ という記号の由来は補講「集合の直積」（668 ページ）を見てください。



その曲線を $y=f(x)$ の **グラフ** と呼ぶわけです。 **グラフ**

組 $(a,\ f(a))$ 全部を座標平面上に書き込んでいく，というところを集合の言葉で言いかえると，

$$\{(a,\ f(a))|\ a\in\mathbb{R}\}$$

というものを考えるということになります。これは $\mathbb{R}^2$ の部分集合になっています。

さて，上でやったことを1次関数で説明し直しましょう。中学校のときに1次関数のグラフをはじめて描いたとき何をやったか思い出してください。そう，下のような表をまずこしらえました。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$										$\cdots$

下にある y の欄は，与えられた式を用いて x のそれぞれの値を用いて計算します。

そして表の上下の値を座標に持つような点を，座標平面に描いていきました。これが一般的な説明における $(a,\ f(a))$ の組を座標平面に書き込んでいくことに相当します。

すると，それらの点は1直線上に並んでいるように見えます。そこで――上では x の値を1おきで考えましたが――もっと細かく，たとえば0.1おきにとり，それに対応する y を計算し点を取っていくと，ますますその傾向，つまり点が1直線上にあることがはっきりします。

で，中学校のときにはここで作業をやめ，1次関数のグラフが直線になる，と結論しました。

実はこのこと，つまり1次関数のグラフが直線になること，は証明を要します。これについては後で証明のヒントを与えるので，皆さんで考えてください。ここでは先を急いで，1次関数のグラフが直線になることを受け入れることにしましょう。

さて，ここで重要なことは，1次関数を表す式 $y=ax+b$ と直線の様子との関係です。これについては次のことが成り立ちました。

定理 (1 次関数のグラフの特徴)

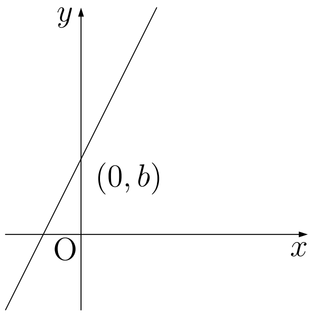
1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは，y 軸と $(0,\ b)$ で交わり，

（1）$a > 0$ のときは，右上がり，

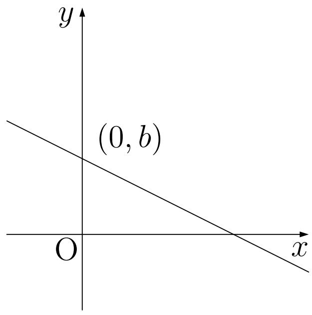
（2）$a < 0$ のときは，右下がり

の直線となる。

(1) $a > 0$ の場合



(2) $a < 0$ の場合



この定理が主張していることから，1 次関数について次のことがわかります。

定理 (1 次関数の性質)　1 次関数 $y = ax + b$ は，

(1) $a > 0$ のとき，増加関数

(2) $a < 0$ のとき，減少関数

ちなみに増加関数，減少関数の定義は次のようなものです。

定義 (増加，減少)　関数 $y = f(x)$ が，その定義されている任意の数 x_1，x_2 (ただし $x_1 \leqq x_2$) に対して，

$$f(x_1) \leqq f(x_2)$$

となるとき，$y = f(x)$ は **増加** するという。 **増加**

また，任意の点 x_1，x_2 (ただし $x_1 \leqq x_2$) に対して，

$$f(x_1) \geqq f(x_2)$$

となるとき，$y = f(x)$ は **減少** するという。 **(定義終)** **減少**

式で書くとわかりにくいかもしれませんが，要は x の値が大きくなればなるほど y の値が大きくなるとき，$y = f(x)$ は「増加する」といい，y の値が小さくなるとき「減少する」というわけです。

上の定理に添えた図を見ると，$a > 0$ のときにはグラフは右上り，つまり x が右にあるほど (つまり x の値が大きくなるほど) y の値は大きくなっています。つまり「増加している」わけです。$a < 0$ の場合にも同様です。

注意　実はこのことは，式だけを用いても証明できます。

証明　$a>0$ の場合，$x_1 \leqq x_2$ とすると，$f(x)=ax+b$ について，

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1) &= (ax_2+b)-(ax_1+b) \\ &= a(x_2-x_1) \end{aligned}$$

であり，$a>0$ と $x_1 \leqq x_2$ より，$a(x_2-x_1) \geqq 0$。つまり $f(x_1) \leqq f(x_2)$。　**(証明終)**

$a<0$ の場合も同様に証明できます。各自試みてください。　**(注意終)**

さて，1 次関数についてもう一つことばを復習しておきましょう。

定義 (y 切片)　1 次関数のグラフと y 軸との交点を y **切片** という。　**(定義終)**　y **切片**

注意

(1) 中学校のときは単に 切片（せっぺん） といったかもしれません。ここでは y 軸との交点であることを強調して y 切片ということにします。
またこのような言葉づかいから,「x 軸との交点は x 切片というのかな」と考えた人もいるかもしれませんね。そのとおり，1 次関数のグラフと x 軸との交点を x 切片といいます。あまり使うことはありませんが，ついでに覚えておいてください。　x **切片**
(2) y 切片は「グラフと y 軸との交点」ですから，y 切片を考えるときは座標を思い浮かべるように。たとえば，$y=3x+2$ の y 切片は $(0,\ 2)$ です。

(注意終)

この定理から，関数の式 $y=ax+b$ を見ただけで，1 次関数のグラフの状況がほとんどわかってしまうことに注意しましょう。実際，1 次関数のグラフが直線になることが知られていて，x の係数である a の正負を見ることで右上がりのグラフになるのか右下がりになるのか，そして，定数項を見ることで，y 軸との交点の位置（つまり y 切片）が分かるわけです。こういったことから，1 次関数が単純なものであるといった理由が理解できるでしょう。

練習 96 次の 1 次関数は右上がりのグラフか，右下がりのグラフか（もちろんグラフを描かずに答えよ)。また y 切片を答えよ。

(1) $y=2x+1$　　(2) $y=-x+4$
(3) $y=5x-2$　　(4) $y=-2x$

くり返しになりますが，式を見ただけで，1 次関数のグラフのほとんどの状態がわかってしまいます。

そして後一つ，あることがわかると，1 次関数のグラフを描くことはたやすくなります。それは何でしょう。次の図形の性質からわかります。

定理 (直線の性質)　2 点を通る直線は 1 本しかない。

われわれはすでに関数のグラフが $(0,\ b)$ を通ることを知っていますから，もう一つグラフの通る点がわかれば，その 2 点を通る直線を定規で描くことで，与えられた 1 次関数のグラフが得られます。そしてもう一つの点は， x に 0 以外の値を代入し（y 切片は $x=0$ のときの関数の値 !!），対応する y の値を計算すれば簡単に求められます。

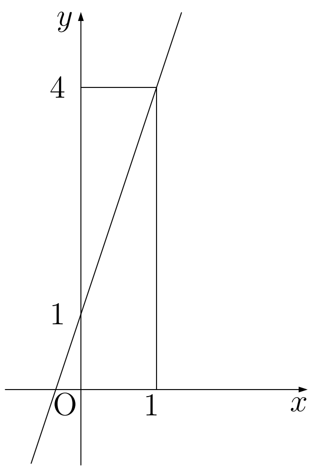
このようにすれば，たくさんの点を座標平面に書き込むことなく，1 次関数のグラフを描くことができます。

例　$y=3x+1$ のグラフを描いてみましょう。

式からすぐに分かるように，y 切片は $(0,\ 1)$ 。

また $x=1$ のとき， $y=4$ 。つまりグラフは $(1,\ 4)$ も通ります。

よって $y=3x+1$ のグラフは次ページの図のようになります[9]。



(例終)

練習 97 次の 1 次関数のグラフを描け。

(1) $y=2x+1$　　(2) $y=-x+4$

(3) $y=\dfrac{2}{3}x-2$　　(4) $y=-2x$

11.3.3　1 次関数の変化の割合

実は式 $y=ax+b$ には前節で説明したこと以外の情報も含まれています。

そのあたりのことを説明することと，1 次関数の性質を明らかにするために，変化の割合という考え方を導入します。

定義 (変化の割合，あるいは平均変化率)　関数 $y=f(x)$ を考える。

x が $x=x_0$ から $x=x_1$ まで変化したときの $f(x)$ の **変化の割合**（あるいは **平** **変化の割合**

均変化率）を　　**平均変化率**

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

と定める。ただし $x_0 \neq x_1$ とする。 **(定義終)**

注意

(1) 「$x=x_0$ から $x=x_1$ まで変化したとき」という言い回しと，式

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

における x_0 と x_1 の順番に注意してください（次の例においても，よく観察してください）。

(2) 式

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

の分母 x_1-x_0 を x **の増加量**，分子 $f(x_1)-f(x_0)$ を y **の増加量** と呼ぶことがあります。　　x **の増加量**　y **の増加量**

(注意終)

例　$y=x^2-3x+1$ の $x=0$ から $x=1$ までの変化の割合は，$f(x)=x^2-3x+1$ とおくと[10]，

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{(1^2-3\times1+1)-(0^2-3\times0+1)}{1}=-2$$

また $f(x)=x^3$ の $x=1$ から $x=-1$ までの変化の割合は

$$\frac{f(-1)-f(1)}{(-1)-1}=\frac{-2}{-2}=1$$

となる。 **(例終)**

練習 98 次の関数の変化の割合を計算せよ。

(1) $y=3x+4$　（$x=2$ から $x=4$ まで）

(2) $f(x)=-x^2$　（$x=-3$ から $x=1$ まで）

(3) $y=x^3-4x$　（$x=3$ から $x=0$ まで）

---

[9] 今はたまたま x に 1 を代入して y の値を計算しましたが，式の形によって計算しやすくなるような x を代入すればよい（次の問（3）参照）。

[10] こういうときに $f(x)$ という記号の便利さを感じるものです。

さて話を 1 次関数に戻しましょう。

1 次関数 $y = ax + b$ の $x = x_0$ から $x = x_1$ までの変化の割合を計算してみます (もちろん $x_0 \neq x_1$ とします)。$x = x_0$ のときの y の値は $ax_0 + b$ であり， $x = x_1$ のときの y の値は $ax_1 + b$ ですから，

$$\frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a$$

つまり 1 次関数 $y = ax + b$ の $x = x_0$ から $x = x_1$ までの変化の割合は a になっています (上の練習の (1) を見直してください!)。

ところで，今「 $x = x_0$ から $x = x_1$ まで」で変化の割合を計算しましたが，x_0 や x_1 はどのような値なのか決まっていません。言い換えるとどのような値でもよいわけです。ということは，次の定理が成り立っていることが分かります。

定理 (1 次関数の変化の割合)　1 次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は常に a に等しい。

言い換えると，1 次関数の変化の割合は一定である。

さらに付け加えるなら，1 次関数の x の係数が変化の割合になっています。

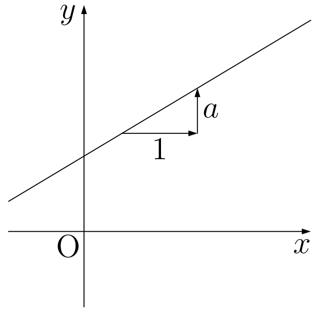
さて次に，この定理を図形的に解釈してみましょう。

先の注意の（2）で触れたように，変化の割合の分子を y の増加量，分母を x の増加量といいました。

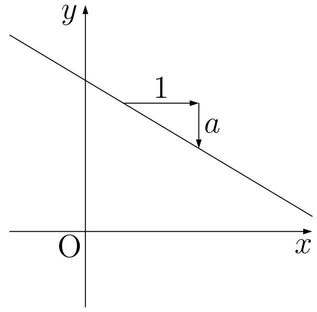
1 次関数の変化の割合は一定ですから， $x = x_0$ から $x = x_1$ までの変化として，その差が 1 の場合を考えましょう。つまり $x_1 - x_0 = 1$ とします。

すると 1 次関数の変化の割合の式は $\dfrac{a \times 1}{1}$ と書け，対応する y の増加量が a であることがわかります。つまり，x が 1 増加するとき，y は a 増加すると解釈することができます[11]。

(1) $a > 0$ の場合



(2) $a < 0$ の場合

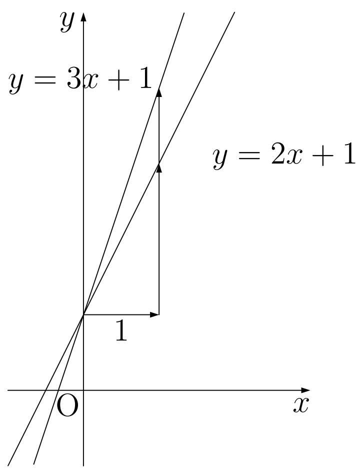


[11] ここで何気なく「増加する」と書きましたが，a は負のこともあり，この場合実際には「減少する」ことになります。

正負の数を勉強したとき，たとえば「2 減少する」というのは「 -2 増加する」と言い換えることができたことを思い出してください。

上の図をもう少し詳しく観察しましょう。

左側，つまり $a > 0$ の場合で考えます。y 切片が同じ二つの 1 次関数 $y = 2x + 1$ と $y = 3x + 1$ を観察しましょう。



すると前者の一定な変化の割合は 2，後者の変化の割合は 3 です。グラフにすると，上の図のようになります。

これからわかるように，$y = 3x + 1$ のグラフは $y = 2x + 1$ のグラフより傾き方が大きくなっています。

$a < 0$ のときにも同じようにして，状況を観察することができます。

問 57 $a < 0$ であるような例を自分で考え，上と同じように状況を観察せよ。

一般に次の事が分かります。

a の絶対値が大きければ大きいほど，グラフの傾き方は大きくなる[12]**。**

これで 1 次関数 $y = ax + b$ の a の意味がはっきりしました。つまり a は 1 次関数のグラフの傾き具合を表しているのです。そこで次のように言葉を定めます。

定義（傾き）　1 次関数 $y = ax + b$ の x の係数 a をこの関数の **傾き** という。　**傾き**

（定義終）

次に定理「1 次関数の変化の割合」の逆を考えましょう。

第 6 章「論理」でやったことの復習もかねて，少し詳しく逆命題の作り方を説明しておきます。

定理「1 次関数の変化の割合」は「1 次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は常に a に等しい」というものでしたが，この命題には「ならば」という単語が含まれて

[12]「a の絶対値が大きければ」であって「a が大きければ」ではないことに注意！　正の数のときは問題ないでしょうが，負の数で絶対値が大きくなると，数としては小さくなっていきます。

いません。それゆえ，この命題の逆を作る，といわれても戸惑うことでしょう。慣れないと難しいものです。

これは次のように言い直すことができます。

関数 $y = f(x)$ が 1 次関数ならば，その変化の割合は常に一定である。

この形ならば，逆命題を作るのはそんなに困難ではないでしょう。先を読む前に自分で逆命題をノートに書いてみてください。

定理「1 次関数の変化の割合」の逆は次のようになります。

関数 $y = f(x)$ の変化の割合が常に一定ならば，その関数は 1 次関数である。

で，問題は，この命題は真なのであろうか，偽なのであろうか，ということです。つまり

関数 $y = f(x)$ の変化の割合が常に一定ならば，その関数は 1 次関数か？

という問題を考えようというわけです。

次の問は難しいですが，じっくり取り組むことで，1 次関数，変化の割合とはどのようなものか，また変化の割合が一定であるとは何を意味するのか,「すべてのなんたらについて〜である」という命題の証明方法などを深く理解することができるようになるでしょう。

問 58 以下にこの問題の解答を記すことになるが，その前に，上の問題を自分で十分考察し，真ならば証明を，偽ならば反例を与えよ。

さて，十分自分の考えをまとめてみたでしょうか？　まずは解答を与えましょう。

結論から言うと，この命題は真になっています。

証明　変化の割合が一定である関数を $y = f(x)$ とする。$f(x) = ax + b$ となる定数 $a,\ b$ が見つかれば真であると結論することができる。

まず $b = f(0)$ としよう。

ところで変化の割合が一定であるということは，どんな $x_0,\ x_1$（ただし $x_0 \neq x_1$）についても

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

が一定であるということである（ここで「どんな $x_0,\ x_1$ についても」という部分がポイントである)。この一定数を a としよう。また x_0 として 0 をとろう。

すると任意の $x_1 = x$ （ただし $x \neq 0$）に対して上の分数は

$$\frac{f(x) - b}{x} = a$$

となる。両辺に x をかけて， b を移項すれば,

$$f(x) = ax + b$$

つまり $x \neq 0$ であるすべての x に対して上の等式 $f(x) = ax + b$ が成り立っている。ここで $x = 0$ とすると，左辺は $f(0)$ ，右辺は b であり， $b = f(0)$ とおい

たので，これらは等しい。つまりすべての x について等式 $f(x)=ax+b$ が成り立っていることがわかる。

よって変化の割合が一定な関数は1次関数である。 **(証明終)**

以上をまとめると，

定理 (変化の割合が一定の関数) 変化の割合が一定な関数は1次関数である。

この定理と定理「1次関数の変化の割合」をあわせると，次の定理を得ます。

定理 (1次関数の特徴づけ) 関数が1次関数であるための必要十分条件は，変化の割合が常に一定であることである。

この定理は，変化の割合というものによって，1次関数をとらえることができたことを意味しています。

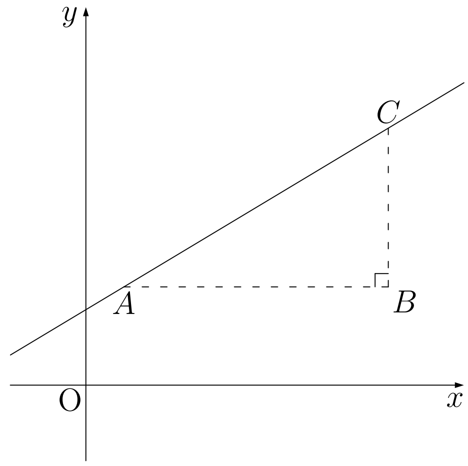
おまけ 上の証明を読んでいて，どうやったらこのような証明を思い付くのか，不思議に思った人がいるかもしれません。このあたりのことを説明するのは（数学と同じく）かなり難しいのですが，私がどのような考えをたどったのか簡単に記し，参考に供してみましょう。

第一の問題は，問題になっている命題「関数 $y=f(x)$ の変化の割合が常に一定ならば，その関数は1次関数である」が真なのか，偽なのかです。この結論の見当がつかなければ，証明を考えたらよいのか，反例を考えたらよいのか方針がはっきりしません。そこでまずここから手をつけることにします。

そこで問題の仮定「変化の割合が常に一定」を解釈してみましょう。先に1次関数の変化の割合が一定であることを証明し，$y=ax+b$ の場合には a がその一定な変化の割合であり，傾きといいました。そして傾きの図形的を解釈すると，x が1だけ増えたときの上下動が変化の割合 a でした。

先にはわかりやすくするために x が1だけ増えた場合を考えましたが，別に1だけ増える場合を考える必要はありません。実際，x が2増えると，y は $2a$ 増え，3増えると，y は $3a$ 増える，…。要は x の増え方と，y の増え方の「比」が一定になっているのです。これが仮定「変化の割合が常に一定」の意味です。

これをグラフで見ると，x の増加量は線分 AB の長さ，y の増加量は線分 BC の長さ（ただしグラフが右下がりのときには負の数を考える）になります（下の図参照)。三角形 ABC が直角三角形であることにも心を留めておいてください。



上のことは x の増加量を与えると線分 AB が決まり，そしてそれに対応する y の増加量である線分 BC が決まります。この比が一定で，得られる三角形 ABC は直角三角形なので，これらはすべて相似です（相似条件「２辺の比とその間の角」が成り立っている）。また図の線分 AB はどの場合を考えても x 軸に平行であり，線分 BC は y 軸に平行になっています。よってどの場合を考えても線分 AC たちは，平行になります。

それどころか，実は一直線上に乗っているはずです。これは上の図のような状況を考えると，ちょっとわかりにくい。それは二つの点 A と B の両方が動いてしまうためです。そこで点 A を固定してみます（これが上の証明で x_0 を 0 にしたことに相当します）。線分 AB たちは x 軸に平行でしたが，固定した点 A を通るので，x の増加量を考えるたびに定まる点 B は常に点 A を通り x 軸に平行な直線上にあります。三角形 ABC たちは相似だったので，$\angle$ A はすべて等しい。よって点 C たちは一直線上になければならないことがわかります。

１次関数のグラフが直線になることはまだきちんと証明していませんが，ここまでの考察によって，問題にしている関数が，1 次関数になっていそうなことが予想できます。つまり命題が真であろうと考えることができるわけです。

そこで次の問題は，それをどうやって証明するかです。これはそれほど難しいことではありません。実際，上で点 A を固定したのですから，変化の割合の x_0 か x_1 のいずれかを固定する，つまり定数と考えて（今は x_0 を固定してみる）変化の割合の式をもう一度書けば，

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=(\text{一定}), \qquad (\ x_0\ \text{は定数})$$

であり，$f(x_0)$ も定数であることに注意すれば，$f(x_1)$ が x_1 についての 1 次式であることが見えてきます。

ここまでくると，実は上の図形的な考察はあまり必要ではなかったことに気が付くかもしれません。実際，任意の x_0，x_1 について変化の割合，

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

が一定である，ということを式で表せば上の式になり，すぐに証明が得られるからです。

しかし上の図形的考察は無駄にはなりません。実際，この考え方を用いれば1次関数のグラフが直線になることが証明できるからです。

問 59 1次関数のグラフが直線になることを証明せよ。

（おまけ終）

11.4 1次関数の決定

関数が1次関数であることがわかっていて，ある条件が満たされると，その式自体が完全に定まってしまうことがあります。

実際問題への適用からいえば，何らかの状況において考えている関数が1次関数であると結論づけられるかどうかのほうが難しく，その意味ではここで扱う問題はそのまま応用できるわけではありません。しかし先にも書いたように，単純な場合から調べ，より複雑なものが扱えるようになれば良いわけで，まずはどのような場合に式を求めることができるのか，1 次関数の場合によく慣れておいてほしいと思います。

よって考えている関数が1次関数である場合をまず扱います。

1次関数とは二つの変数 x, y の間に $y = ax + b$ という関係式が成り立つものをいいます。よって1次関数を求めるということは二つの定数 a, b の値を求めることと同じです。

言い換えると，傾きと y 切片がわかれば，その1次関数を求めることができたと考えることができます。

11.4.1 変化の割合と，1組の x, y の値が与えられた場合

この場合には1次関数の形がわかります。具体例で示しましょう。

例題 29 変化の割合が3で，$x = 1$ のとき $y = 4$ である1次関数を求めよ。

解説 1次関数を $y = ax + b$ とするとき，傾き a が変化の割合に等しかった。よって求める関数は $y = 3x + b$ という形をしています。後は b の値を求めればよいことになります。

もう一つの条件「$x = 1$ のとき $y = 4$ である」は，上の式の x に1，y に4を代入したものが成り立つということを意味しています。つまり

$$4 = 3 \times 1 + b$$

これは b についての1次方程式で簡単に解くことができます。

解答例　変化の割合が3なので，求める1次関数は $y = 3x + b$ という形をしている。

また $x = 1$ のとき $y = 4$ なので，

$$4 = 3 + b$$

これを解いて $b = 1$。

よって求める関数は

$$y = 3x + 1 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 99 次の条件を満たす1次関数を求めよ。
(1) 変化の割合が -2 で，$x = 3$ のとき $y = 2$
(2) 変化の割合が $\dfrac{2}{3}$ で，$x = 2$ のとき $y = 1$

上では「変化の割合」と，ある x に対応する y の値を与えたものを考えましたが，これは求める1次関数のグラフの傾きとどこを通るかを与えることと同じです。

つまり上の例題は次のように書くこともできます。

「1次関数のグラフの傾きが3で，点 $(1,\ 4)$ を通るとき，関数の式を求めよ。」

もちろん解き方は同じです。いずれの形で出題されても解答できるようになっていてください。

練習 100 次の条件を満たす1次関数を求めよ。
(1) グラフの傾きが $\dfrac{2}{3}$ で，点 $(3,\ 4)$ を通る。
(2) 点 $(-2,\ 3)$ を通り，傾きが -1。

11.4.2　2組の $x,\ y$ の値が与えられた場合

この場合にも1次関数の式を求めることができます。

例題 30 $x = 2$ のとき $y = -3$，$x = -1$ のとき $y = 3$ となる1次関数を求めよ。

解説　求めようとしている関数は1次関数ですから，$y = ax + b$ という形をしています。

与えられた条件をこれに代入すれば，定数 $a,\ b$ についての連立方程式が得られます。後はこれを解けばよいことになります。

解答例　求める1次関数を $y=ax+b$ とする。

$x=2$ のとき $y=-3$ であるから，

$$-3=2a+b \quad \cdots\cdots(1)$$

また $x=-1$ のとき $y=3$ であるから

$$3=-a+b \quad \cdots\cdots(2)$$

(1)，(2) を連立方程式として解くと，

$$a=-2,\ b=1$$

ゆえに求める式は

$$y=-2x+1\ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 101　次の条件を満たす1次関数を求めよ。
(1) $x=3$ のとき $y=4$，$x=12$ のとき $y=10$
(2) $x=2$ のとき $y=-3$，$x=4$ のとき $y=-9$

2組の $x,\ y$ の値を与えるということは，グラフが通る2点を与えることと同じです。

よって上の例題は次のように言いかえることができます。

「グラフが2点 $(2,\ -3)$，$(-1,\ 3)$ を通る1次関数の式を求めよ」

練習 102　次の条件を満たす1次関数を求めよ。
(1) 2点 $(1,\ 1)$，$(3,\ -3)$ を通る。
(2) 2点 $(-2,\ 2)$，$(0,\ 3)$ を通る。
(3) 2点 $(4,\ 0)$，$(0,\ 8)$ を通る。

注意
(1) 2組の $x,\ y$ の値を与えると1次関数が求められるという事実は，「2点を通る直線はただ1本である」という図形的な性質を式の世界で表現したものと考えることができます。
(2) ここではまったくグラフに触れませんでしたが，上の二つの例題を図にしてみてください。後者については別解を見つけることができるかも。
(3) 上に挙げたいずれの例題も「変化の割合と1組の $x,\ y$」，「二組の $x,\ y$」のように条件が二つであることに注意してください。これは求めなければならないものが $a,\ b$ の二つであることに由来しています。

(注意終)

11.5　1次関数の最大・最小

11.5.1　最大・最小問題

ある条件の下で，何かが一番大きくなる，あるいは一番小さくなるのはどのようなときで，そのときの値はいくらになっているのか，という問題がさまざまな形をとって現実に生じます。

たとえば何かを作ろうとするとき，できるだけ原材料にかかる費用は抑(おさ)えて，できるだけたくさんのものを作りたいというのが（少なくとも商売をしようと考えるものなら）自然です。

ある条件を与えて，どんなときに関数が一番大きくなるのか，あるいは一番小さくなるのかという問題は昔から数学において中心的な問題の一つでした。その一つとして，

問題　与えられた長さを周に持つ図形で面積最大のものはどんな図形か？

というものがありますが，これなどは典型的なものです[13]。

このような問題を **最大・最小問題** といいます。　**最大・最小問題**

今後さまざまな形で最大・最小問題を考えることになりますが，まずは単純な1次関数の場合にこれを考えましょう。複雑な関数を考えるにしたがって，手法も複雑となります，いずれにしても基本的な武器はグラフです。

高校で与えられる最大・最小問題の大半は，グラフを描くことによって解決できるでしょう（とはいうものの，複雑な関数のグラフをどうやって描くかが問題でもありますが)。

11.5.2　関数の定義域・値域

日常的な問題を考えるとき，変数はどんな値でも取れるわけではなく，ある範囲内に収まっていることが多い。たとえば線香を燃やすと，燃えるスピードは一定であることが知られています。スピードとは先に説明した変化の割合のことですから，線香の長さは時間についての1次関数になっていることがわかります。実際，最初の長さが b cm で，1分間に a cm 燃えるとすると，火をつけてから t だけ時間が経過した時残っている線香の長さ x は

$$x = -at + b$$

となります[14]。

[13] 厳密な解答を与えるには大学レベルの数学が必要となりますが，答えの見当をつけるのはそんなに難しくありません。ちょっと面白い問題だから，両端を結んだ紐(ひも)をテーブルの上になど置いて，試行錯誤してみてほしい。

[14] 今までは変数として x, y を使ってきましたが，ここでは時間（ time ）を意識するために変数として t を用いました。この場合 t が独立変数，x が従属変数です。

線香の長さは有限ですから，いつまでも燃えていることはできません。よってある時間（ t_0 ）以降を考えるのは無意味です。また，火をつけた時刻を普通 0 と考えるので，t として負の数を考えることもありません。

よって今の場合，変数 t は $0 \leqq t \leqq t_0$ の範囲で考えることになります。

また従属変数である x の方も，$0 \leqq x \leqq b$ の範囲以外の値を取ることはありません（なぜか。理由を考えよ）。

このように変数の変わりうる範囲は不等式で表されることが多い。

こういったことを頭に置きながら，次のように言葉を定めます。

定義 (定義域，値域)　独立変数の変わりうる範囲を表す集合を **定義域**，従属変数の変わりうる範囲を表す集合を **値域**（ちいき） という。 **(定義終)**　**定義域**　**値域**

注意　独立変数の変わりうる範囲を定義域，従属変数の変わりうる範囲を値域といい，区別していることに注意してください。

独立変数，従属変数の区別なく，単に変数の値が取り得る範囲を考えるときには**変域** という言葉を使うことがあります。あわせて記憶しておいてください。 **(注意終)**　**変域**

上の例でいえば，定義域は $0 \leqq t \leqq t_0$ ，値域は $0 \leqq x \leqq b$ となっています。

1 次関数の独立変数は実数の範囲内で変化するので，定義域は実数の集合の部分集合になっています。高校で考える 1 次関数のほとんどは，その定義域が上のような不等式で表されるものに限ります。

そこで，定義域が $p \leqq x \leqq q$ である 1 次関数 $y = ax + b$ を

$$y = ax + b \qquad (\ p \leqq x \leqq q\ )$$

と表すことにしましょう。

上に挙げたものの定義域にはその端である p や q が含まれていますが，問題によっては含まれないこともあります。つまり定義域としては上のようなもののほかに，

$$p < x < q, \qquad p \leqq x < q, \qquad p < x \leqq q$$

といったものもありえます。

またもう少し特殊な定義域として，上の p あるいは q のないもの，

$$p < x, \qquad p \leqq x, \qquad x < q, \qquad x \leqq q$$

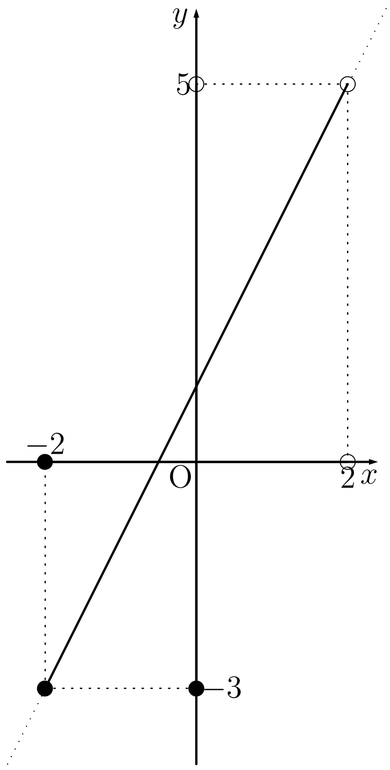
というものもあります。

また特に定義域の指定がない場合（これを前節までで扱ってきた），実数全体を定義域と考えるのが習慣です。

また残っている線香の長さを考えているので，$-at$ と b から引く形になっています。

定義域の定められた関数のグラフと値域　定義域の与えられた関数のグラフの描き方を説明しましょう。これが次の「1次関数の最大・最小」において重要なポイントとなるので，しっかりつかんでおいてください。

例　$y = 2x + 1$（$-2 \leqq x < 2$）のグラフ。



まずは定義域の制限のない $y = 2x + 1$ のグラフを描きます（少し薄く線を引いておくといいでしょう。図では，点線で描いておきました）。

次に x 軸の $-2 \leqq x < 2$ に対応する部分に印をつける（私は図のように少し太め目の線にするか，色鉛筆などで塗りつぶすようにしています。定義域が図の中でどこなのかを自分に言い聞かせるためのものですから，どのように記してもよいでしょう。各自工夫してほしい）。

その際，二つの端の片方が黒丸で，もう片方が白丸になっていることに注意してください。これは $-2 \leqq x < 2$ の二つの不等号 $\leqq$, $<$ に対応しており，等号が入る場合（つまり $\leqq$ ）を黒丸で，等号が入らない場合を白丸で表しています。同様のことを不等式の解を数直線上に表すときにやりました。

ついでに両端である $x = -2$ と $x = 2$ に対応する y の値を計算しておきます。

$x = -2$ のとき $y = 2 \times (-2) + 1 = -3$

$x = 2$ のとき $y = 2 \times 2 + 1 = 5$

こうして得られる2点 $(-2,\ -3)$ と $(2,\ 5)$ を結ぶ線分が求めるグラフになっています（図中の斜めの太線部分）。x 軸に描いた線分と同様にグラフの両端も定義域に応じた白丸，黒丸になっていることに注意するように。

さて，x が -2 から 2 まで変化するとき (頭の中で点が x 軸上を -2 から 2 まで動く様子をイメージしてください)，それに応じて y は -3 から 5 まで変化します (グラフに描いたように $x=-2$ のとき $y=-3$ となっています。x が少しずつ大きくなると，グラフを経由して y の値も大きくなっていきます)。ここで一つ注意が必要です。与えられた関数の定義域は $-2 \leqq x < 2$ で x は値 2 をとりません。限りなく近い値はとりますが，ジャスト 2 にはならないのです。つまり，y の値は 5 に限りなく近い値はとりますが，ジャストにはなりません。

以上のことから，値域は $-3 \leqq y < 5$ となります。 **(例終)**

ここでは $-2 \leqq x < 2$ のように両端のある定義域のグラフを描いてみせましたが， $-1 < x$ などのような場合も同様です（この場合は線分ではなく，半直線になります)。

練習 103 次の関数のグラフを描け。また値域を求めよ。

(1) $y=3x+1$ （$-1 \leqq x \leqq 3$） (2) $y=-3x+2$ （$-2 < x \leqq 1$）
(3) $y=2x-2$ （$-1 < x < 3$） (4) $y=-x-1$ （$1 \leqq x$）

11.5.3 1 次関数の最大・最小

定義域の与えられた関数のグラフが描けると，最大・最小を求めるのは簡単です。

まずは，最大値，最小値の定義を与えておきましょう。

定義 (最大値，最小値) 関数 $y=f(x)$ の値域に最大の値があるとき，これを $f(x)$ の **最大値**，最小の値があるとき，これを $f(x)$ の**最小値** という。 **(定義終)** **最大値** **最小値**

上の定義は注意深く読んでください。「値域に最大の値がある **とき**」と，いうように仮定法で書かれています。

つまり最大の値（あるいは最小の値）がないような場合もあるということです。これについては例で説明しましょう。

例 $y=2x+1$（$-2 \leqq x < 2$）の最大値と最小値。

これは先の例 (236 ページ) で取り上げたものです。それによると，値域は $-3 \leqq y < 5$ です。

この値域の最大の値や最小の値は何になるでしょう。

最大の値は 5，最小の値は -3 と答えたい。しかし不等式をよく見ましょう。一方には等号が入っていますが，他方には入っていません。これは等号が入っている方はその値を取りうるのですが，等号が入らない方はその値を取ることができないということを意味しています。

つまり y は -3 という値をとることができるが，5 という値をとることはできません。言い換えると，最小の値はあるのですが，最大の値はありません。

つまり $y=2x+1$（$-2 \leqq x < 2$）の最小値は -3，最大値はなし，となります。

(例終)

この例から理解できるように，関数の最大値や最小値は存在することもあれば存在しないこともあります。それはそれぞれの関数や，定義域の状況に依存するわけです。

さらに 1 次関数の最大値や最小値は，——もし存在すれば——定義域の両端における x に対応する y の値になっていることも観察できるでしょう[15]。

練習 104 次の関数について，最大値，最小値があればそれを求めよ。

(1) $y=3x+1$ （$-1 \leqq x \leqq 3$）　(2) $y=-3x+2$ （$-2 < x \leqq 1$）

(3) $y=2x-2$ （$-1 < x < 3$）　(4) $y=-x-1$ （$1 \leqq x$）

以上のことから，与えられた関数の最大値や最小値を求めるには，

- 与えられた定義域のグラフを描く。
- それによって値域を求める。
- 値域の不等号をよく観察し，最大値と最小値を求める。

という手順を踏めばよいことがわかります。

例題 31 関数 $y=ax+b$ （$-2 \leqq x \leqq 1$）の最小値が -1，最大値が 5 であるように定数 $a,\ b$ の値を定めよ。ただし，$a<0$ とする。

解説　今度は逆のことを考えましょう。つまり最大値や最小値がわかっているとき，そのような値を取るような 1 次関数を求めてみましょう。

まず「$a<0$」という条件に注目してください。これは求めようとしている関数のグラフが右下がりの直線になっていることを示しています。よって先に触れたことから，$x=-2$ のとき最大値をとり，$x=1$ のとき最小値をとることがわかります。後はこれを式で表すことで，$a,\ b$ についての連立方程式が得られ，それを解けばよいことになります。

解答例　$a<0$ であるから，関数のグラフは右下がりの線分。

よって $x=-2$ のとき最大値をとり，$x=1$ のとき最小値をとる。

$x=-2$ のとき $y=-2a+b$。

$x=1$ のとき $y=a+b$。

ゆえに

$$\begin{cases} -2a+b=5 \\ a+b=-1 \end{cases}$$

[15] これは「1 次関数」についてのみ成り立つことです！　後で 2 次関数やそれ以外のいろいろな関数の最大値や最小値を考えることになりますが，その場合には上に挙げた手順で求めていくことになります。

これを解いて，

$$a = -2,\ b = 1\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

上の例題では最大値と最小値を与えましたが，値域を与えても同様です。

練習 105 次の条件に適するように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ。

(1) 関数 $y = ax + b$ （$-2 \leqq x \leqq 1$）の最大値が 1，最小値が -8 である。ただし $a > 0$ とする。

(2) 関数 $y = ax + b$ （$2 \leqq x < 4$）の値域が $-1 < y \leqq 0$ である。ただし $a < 0$ とする。

11.6　さらに勉強するために

1 次関数は単純であると，何度か書きましたが，それは一般の n 次関数や——まだかけらも見えない——三角関数，指数関数・対数関数などに比べてのことです。

「はじめに」にも書きましたように，まずは関数というものに慣れてほしいと思います。すると今までの数学と異なる,「変化を分析する」という観点に立っていることに気がついてくるでしょう。

この章では，関数の基本的な扱い方——グラフを描いてどのように値が変化していくかを観察する——を感じ取ってもらえていれば十分です。そして同じことを 2 次関数についてやってみせましょう。