

# 第13章 2次不等式の解法

## 13.0 はじめに

前章で2次関数については一段落。本章では2次関数の応用例として、この節では2次不等式の解き方を紹介しましょう。

2次不等式に興味を持つ理由の一つは、1次不等式が比較的容易に解けたことに力を得て、ではそれが2次になった場合にはどうなるのか、という純粋に数学的なものがあります。これは、1次方程式 2次方程式 と同じ興味の持ち方です。

単純(次数が低い)なものから複雑(次数が高い)なものへと、探求の対象を深めていくことは、研究のもっとも基本的な手法といえるでしょう。

もう一つの理由は、もちろん他分野への応用です。2次方程式や2次関数を調べたくなる理由は、物理や天文学に応用があったからでした。2次不等式も当然これらの分野に応用できます。さらに、微分積分での計算途中において、必然的に2次不等式を解く必要があるのです。こういった応用については、後でとりあげます。

2次不等式の解き方は、1次不等式と比べるとだいぶ複雑ですが、早く慣れて自由自在に解けるようになっておいてください。

また本章の後半では、2次不等式の代数的な解き方を紹介します。

補講で連立2元1次方程式の代数的解法を説明しましたが、それを読んだ人は予感できると思いますが、代数的な方法は多くの場合わけを必要とすることが多いので、はじめて扱うときには複雑で分かりにくく感じることでしょう。

しかし、この方法も場面によってはたいへん有効なので紹介することにしました。高校での数学を余り必要としない人は、前半だけ読んで先に進んでも構いません。

## 13.1 2次不等式の定義

まずは定義。

定義(2次不等式) 展開して整理することで

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (\text{ただし } a, b, c \text{ は実数の定数})$$

の形になる不等式を 2次不等式 という。

(定義終) 2次不等式

これは、1次不等式の定義とほとんど同じですから、定義自体は問題ないでしょう。

この定義では不等号  $>$  のものしか書きませんでした、 $>$  を  $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$  としたものもあります。

こういったことから、2次不等式の解の状況が繁雑になります。

## 13.2 2次不等式の解き方 代数的方法 vs. 解析的方法

さて、2次不等式の解き方ですが、これには二通りの方法があります。一つは純代数的な方法、今一つは関数のグラフを用いる解析的方法です。

不等式には  $>$  のタイプと  $\geq$  のタイプがあり、実は2次不等式の場合いずれの方法をとっても場合わけが複雑になるのは避けがたいものがあります。そこで、ここでは比較的解法がわかりやすいものとして、2次関数のグラフを応用した2次不等式の解き方を紹介します。

関数による方法は直観的に理解しやすいのですが、高次、つまり3次以上の不等式の解き方へは 我々は3次以上の関数のグラフがどのようになっているのかを今は知らないの で すぐに応用できません。

いずれの方法も一長一短です。

## 13.3 2次関数のグラフと $x$ 軸との共有点

グラフを応用した2次不等式の解法を紹介する準備として、2次関数のグラフと  $x$  軸との位置関係を調べておきます。これは、2次方程式のところで紹介した定理「2次方程式の解の個数」をいいかえたものになっています。

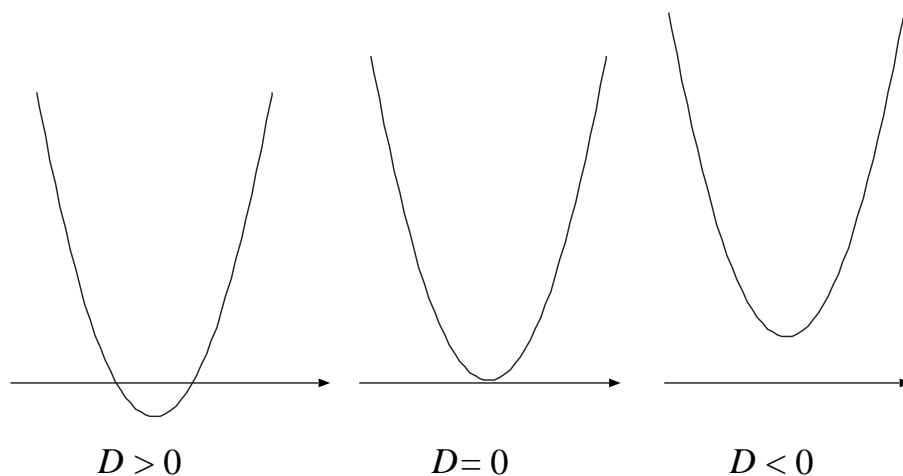
実際、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  で  $y = 0$  とおくと、2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  が得られます。 $y = 0$  は  $x$  軸を表しているとも考えられましたから、この二つを突き合わせると、次の定理が得られます。

定理 (2次関数のグラフと  $x$  軸との交点)

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは、 $D = b^2 - 4ac$  とおくと

- (1)  $D > 0 \iff x$  軸と2点で交わる
- (2)  $D = 0 \iff x$  軸と接する
- (3)  $D < 0 \iff x$  軸と交わらない

図にすると次のようになります (もちろん  $a$  が正、つまり下に凸の場合の図です)。



## 13.4 2次不等式の解き方

### 13.4.1 2次不等式の解き方 関数のグラフを用いて

不等式を解くという代数的な問題は代数的に解決できるので、これを関数を応用して解くのは、ある意味では「鶏頭を切るに牛刀をもってす」なのかもしれません。しかし入試では 高校で習ったものならという条件はつきますが ひとまず問題を解くには「何でもあり」なのですから、関数の考え方を応用してもよいだろうし、上でも触れたように代数的な解き方より直観的に理解しやすいのです。

2次関数のグラフの描き方については前章で説明しましたが、ここでは平方完成して描くほど厳密なグラフは必要ありません。実際、知りたいのは「 $y$  の値が正となるような  $x$  の値」なので、グラフと  $x$  軸との位置関係さえ知れば、2次不等式は解けます。

2次関数のグラフと  $x$  軸との位置関係については先の節で触れました。再掲すると、

定理 (2次関数のグラフと  $x$  軸との交点)

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは、 $D = b^2 - 4ac$  とおくと

- (1)  $D > 0 \iff x$  軸と2点で交わる
- (2)  $D = 0 \iff x$  軸と接する
- (3)  $D < 0 \iff x$  軸と交わらない

図による表現も思い出しておいてください。

以上を準備として、2次不等式の解き方を例で説明しましょう。

例 2次不等式  $x^2 - 5x + 6 > 0$  を解くことを考えましょう。この不等式を解くとは、左辺に代入して計算した結果が正となるような  $x$  の値をすべて求める、ということです。

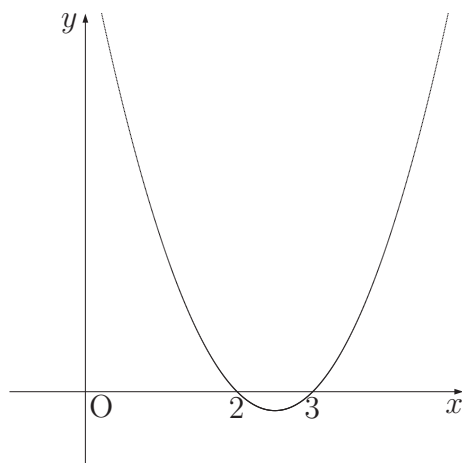
さてこの不等式に対して、左辺の式で定まる2次関数  $y = x^2 - 5x + 6$  を考えます。

するとこの不等式を解くとは、右辺に代入して計算した結果が正となるような  $x$  の値をすべて求める、ということ、言い替えると  $y$  の値が正となるような  $x$  の値をすべて求める、ということです(少しややこしい方がいいので注意!)

そこでこの2次関数  $y = x^2 - 5x + 6$  のグラフを描いてみましょう。

まず  $x^2$  の係数は1なので、グラフは下に凸。

次に2次方程式  $x^2 - 5x + 6 = 0$  を解くと、 $x = 2, 3$  となり、これは2次関数  $y = x^2 - 5x + 6$  のグラフと  $x$  軸との交点の  $x$  座標になっています。つまり2次関数  $y = x^2 - 5x + 6$  のグラフと  $x$  軸とは2点で交わっています。よってグラフは次のような形をしていることがわかります。



さて、今解きたいのは  $x^2 - 5x + 6 > 0$  という不等式でした。この左辺を  $y$  と置いたので、 $y$  が正になる所、これはグラフでいうと  $x$  軸より上にある部分になります。次の図でいえば太い部分がそれに相当します。

で、求めるべきは、このような  $y$  を与えるような  $x$  の値ですから、結局  $x < 2$  または  $3 < x$  であることがわかります(次図の  $x$  軸を参照)。  $x = 2$  と  $x = 3$  のところでは  $y$  の値が0になるので、白丸になっていることに注意してください。

つまり解は

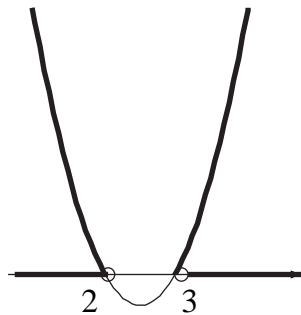
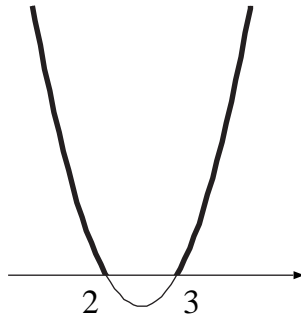
$$x < 2 \text{ または } 3 < x$$

です。

(例終)

例 もう一つ例を挙げましょう。

不等式  $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$  を解いてみます。



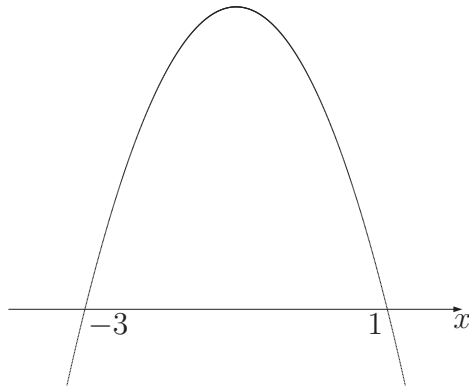
先と同じように  $y = -x^2 - 2x + 3$  とします。このグラフは上に凸。  $x$  軸との交点を求めるために  $-x^2 - 2x + 3 = 0$  という方程式を解くと  $x = -3, 1$  を得ます。今度は  $\geq 0$  となっているので  $x$  軸より上ですが  $x$  軸も含まれます。こういったことを考慮してグラフを描くと、下のようになります。これより不等式  $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$  の解は  $-3 \leq x \leq 1$  となることがわかります。  
(例終)

上に挙げた二つの例ははからずも  $x$  軸より上の部分を考えるものになっていました。これはいつでもそうになっているとは限りません。

どの場合にどのように考えるのか下にまとめておきましょう。場合わけは全部で四つになります。

$y > 0$	$x$ 軸より上
$y \geq 0$	$x$ 軸より上 (軸を含む)
$y < 0$	$x$ 軸より下
$y \leq 0$	$x$ 軸より下 (軸を含む)

以上二つの例から、2次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  を解くには、



- (1) 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  を解く。
  - (2) 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフを，特に  $x$  軸との交点に気をつけながら描く。
  - (3) 不等号に応じて，グラフから解の範囲を読み取る。
- といった手順をふめばいいことがわかると思います。

上の表を参考にしながら，この手順を身につけるために，以下の問いに取り組んでみてください。

練習 122 次の不等式を解け。

- (1)  $x^2 - 2x - 8 < 0$
- (2)  $-x^2 + 4 \leq 0$
- (3)  $x^2 + 2x - 4 \leq 0$  (余りきれいな値が出てきませんが驚かないように！)

さて次に，連立1次不等式のとくと同様に，ちょっと特殊な例をいくつか挙げておきます。これら特殊な例は，少し前に挙げた2次関数のグラフと  $x$  軸との位置関係より生じるものです。まずはグラフと  $x$  軸が接する場合から。

例 2次不等式  $x^2 - 4x + 4 > 0$  を考えましょう。

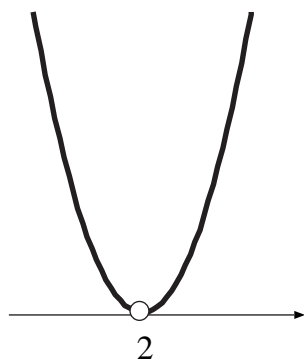
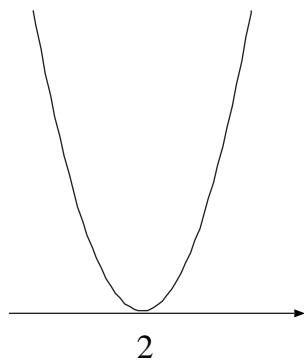
対応する2次関数は  $y = x^2 - 4x + 4$  で，グラフは下に凸。2次方程式  $x^2 - 4x + 4 = 0$  を解くと， $x = 2$  で重解になっています。つまり2次関数のグラフと  $x$  軸との位置関係は「接する」になります。

このとき  $y > 0$  となるグラフの部分はどこでしょう？

これは下の図の太線の部分になります(ただし白丸の部分は除く)。

すると不等式  $x^2 - 4x + 4 > 0$  の解はどうなるでしょう。そう「 $x = 2$  を除くすべての実数」となります。

これは  $x \neq 2$  と書いてもよいし， $x < 2$  または  $2 < x$  と書いてもよい(前者の方がすっきりしています)。(例終)



例 同じような例ですが、不等式が  $x^2 - 4x + 4 \geq 0$  ならどうでしょう。

今度も  $x$  軸より上の部分で考えますが、不等号に等号が入っているので  $x$  軸も含まれます。ということは、先の例で除いた  $x = 2$  も今度は解になっています。つまり除かれる数はありません。

すなわち不等式  $x^2 - 4x + 4 \geq 0$  の解は「すべての実数」となります。(例終)

例 さらに同じような例ですが、不等式  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$  はどうでしょう。

グラフは上と同じようになりますが、今度は  $x$  軸より下(ただし  $x$  軸を含む)で考えることとなります。

ということは、 $x = 2$  だけがこの範囲に引っかかります(図を描け)。つまり不等式  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$  の解は  $x = 2$  となります。(例終)

注意 ここまでの例で、不等式の解は  $x < a$  などのように不等式で表されました。言い替えると、解は無数にありました。しかしこの例が示すように、不等式の解が一つだけということもあります。さらには次の例が示すように、まったくないこともあります。

(注意終)

例 グラフが  $x$  軸に接する最後の例として  $x^2 - 4x + 4 < 0$  を見ましょう。

ここまでの例と同じようにグラフを描いて考えます。すると  $x$  軸より下にあるところはまったくありません。つまり不等式  $x^2 - 4x + 4 < 0$  を満たす解はありません。

すなわち「解なし」です。 (例終)

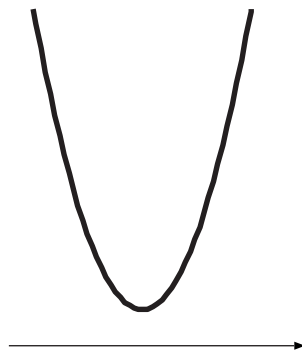
2次関数のグラフと  $x$  軸との関係にはもう一種類ありました。交わらない場合です。

例  $x^2 + x + 1 > 0$  を考えましょう。

対応する2次関数のグラフが下に凸になることはいいでしょう。次に方程式  $x^2 + x + 1 = 0$  を解きます。すると

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

となり、根号の中が負となります。つまり、解なし。言い替えると判別式  $D$  は負。すなわち2次関数  $y = x^2 + x + 1$  のグラフは  $x$  軸と交わりません。



今、 $y > 0$  の場合を解こうとしているのですから、ここまでと同様に  $x$  軸より上にあるグラフの部分を見ると、すべての実数が解であることがわかります(上の図を参照)。

つまり  $x^2 + x + 1 > 0$  の解は「すべての実数」となります。 (例終)

例  $x^2 + x + 1 < 0$  はどうでしょう。

グラフは上の例と同様ですが、 $y < 0$  となる部分を探すと、そのような  $x$  はありません。

よって  $x^2 + x + 1 < 0$  は「解なし」です。 (例終)

練習 123 2次不等式  $x^2 + x + 1 \geq 0$  ,  $x^2 + x + 1 \leq 0$  の二つをそれぞれ解け。



以上で、2次不等式の解の典型的な場合はすべて尽きています。

厳密には2次式の $x^2$ の係数の正負、2次関数のグラフと $x$ 軸との位置関係、 $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$ の別がありますから、全部で24通りの場合が考えられます。しかし、 $x^2$ の係数が負のときには両辺に $-1$ をかけることで係数を正にすることができますから、本質的には12通りです。

問 63 この12通りに相当する例を作り、それぞれの解がどうなるか調べよ。

練習 124 次の2次不等式を解け。

(1)  $9x^2 - 12x + 4 > 0$

(2)  $2x^2 - 3x + 6 \leq 0$

(3)  $2x^2 - 3x + 2 > 0$

(4)  $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

(5)  $x^2 + 4x - 1 < 0$

(6)  $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

### 13.4.2 連立2次不等式

連立でない2次不等式と同様、すべての場合を網羅しようとする<sup>もうら</sup>とすると、多くの例を挙げなければいけなくなります。ここでは少数の例だけを挙げることにしますが、これ以外にもいくつかの場合が考えられます。基本的な考え方は、ここに挙げた例にすべてそろっている<sup>もうら</sup>ので、それらについては読者が各自研究してください。

連立1次不等式のところで定義したように、いくつかの不等式を同時に満たす数を、その連立不等式の解といいます。ここではそのいくつかの不等式がすべて2次以下である場合を扱います。

具体例で説明しましょう。はじめは少し単純な例から。

例題 39 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + x - 72 > 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

を解け。

解説 連立方程式のときと異なり、それぞれの不等式を解くことから始めます。これは連立1次不等式の場合と同様です。

まず第一の不等式を解くと、

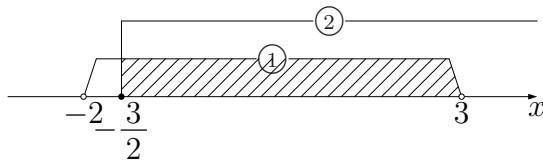
$$-2 < x < 3$$

次に第二の不等式を解くと、

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

で、問題はこの二つを同時に満たす $x$ はどこか、ということになります。

それをはっきりさせるために、それぞれの解を数直線上に表してみましょう。すると下の図のようになります。



この図で重なったところが解となります。これより

$$-\frac{3}{2} \leq x < 3$$

であることが判明します。

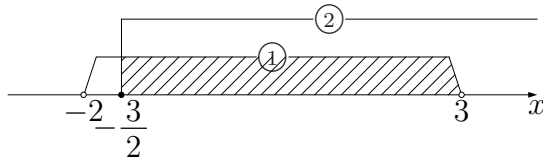
解答例 まず第一の不等式を解くと、

$$-2 < x < 3$$

次に第二の不等式を解くと、

$$x \geq -\frac{3}{2}$$

これらの解を数直線上に表すと図のようになる。



よって、

$$-\frac{3}{2} \leq x < 3 \cdots (\text{答})$$

(解答例終)

次に両方とも2次不等式のことを説明しましょう。

例題 40 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

を解け。

解説 解き方は上の例題と同様です。つまり、

- (1) それぞれの不等式を解き、
- (2) 解を数直線上に表し、
- (3)重なっているところをみる。

という手順で考えればいいわけです。

先の例題と少し異なる部分がありますが、解答例をみる前に自分でまずは解を求めてみてください。特にこの例題の場合、第二の不等式の解が二つの部分に分かれているので注意が必要です。

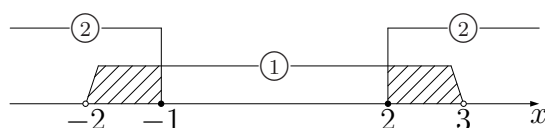
解答例 第一の不等式を解くと、

$$-2 < x < 3$$

第二の不等式を解くと、

$$x \leq -1 \quad \text{または} \quad 2 \leq x$$

これらを数直線上に表すと図のようになる。



よって

$$-2 < x \leq -1 \quad \text{または} \quad 2 \leq x < 3 \cdots (\text{答})$$

(解答例終)

練習 125  $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases}$  を解け。

## 13.5 2次不等式の応用

2次不等式が解けるようになったので、方程式に関する次のような問題を解くことができるようになります。

例題 41  $x$  に関する2次方程式  $x^2 + (k+1)x + 2k - 1 = 0$  が解を持たないような定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

解説 与えられた2次方程式がどのような解をいくつ持つのかは、その判別式を計算すれば分かりました。特に解を持たないのは、判別式が負のときです。

よって与えられた2次方程式の判別式を計算し、それが負であるという不等式を解けばよいことになります。

また、ここまでは不等式を解くときに解答の一部のようにしてグラフを描きましたが、こういった問題では不等式を解くこと自体はもともとの問題を解くときの補助的な意味合いになるので、グラフを描いたり計算したりすることは計算用紙で行い、その結果のみを答案として書いていきます。

下の解答例はこのような考えの下に作られています。今後はこのような解答例が増えていくことでしょう。

解答例 方程式  $x^2 + (k+1)x + 2k - 1 = 0$  の判別式を  $D$  とすると

$$D = (k+1)^2 - 4(2k-1)$$

よって  $D = k^2 - 6k + 5$ 。

今与えられた方程式は解を持たないので  $D < 0$ 。ゆえに

$$k^2 - 6k + 5 < 0$$

これを解くと

$$1 < k < 5 \dots (\text{答})$$

(解答例終)

練習 126 2次方程式  $x^2 - 2(k+3)x - 4k = 0$  が実数解を持つような定数  $k$  の値の範囲を求めよ。

(ヒント：実数解を持つということは「判別式  $D$  について  $D > 0$ 」，ではない)

練習 127 2次方程式  $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$  が異なる実数解を持つとき，定数  $m$  の値の範囲を求めよ。

次は，連立2次不等式の応用例です。

例題 42 二つの2次方程式  $x^2 + ax + 3a = 0$ ,  $x^2 - ax + a^2 - 1 = 0$  がともに実数解を持つような実数  $a$  の値の範囲を求めよ。

解説 やることは，先の例題と同様です。方程式があるので，同じことを2回行い，「ともに」という条件から，連立不等式として解けばよいこととなります。

解答例 第一の方程式が実数解を持つので，その判別式を  $D_1$  とするとき  $D_1 \geq 0$ 。よって

$$a^2 - 12a \geq 0$$

第二の方程式も実数解を持つので，同様にして

$$a^2 - 4(a^2 - 1) \geq 0$$

これらを連立させて解くと、

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq a \leq 0 \dots (\text{答})$$

(解答例終)

練習 128 二つの方程式  $x^2 + 2ax - 2a = 0$ ,  $x^2 + (a - 1)x + a^2 = 0$  がともに実数解を持つような  $a$  の値の範囲を求めよ。

## 13.6 2次不等式の解き方 代数的解法

さて、以上で2次不等式に関してのお話は一段落です。そこで本節では、2次不等式の代数的な解き方を紹介しましょう。「はじめに」にも書きましたが、興味のある人だけ挑戦してみてください。

高次方程式を解くときにポイントとなった定理は「方程式解法の原理」

定理 (方程式解法の原理)  $\alpha\beta = 0$  ならば  $\alpha = 0$  または  $\beta = 0$

方程式解法の原理

でした。

2次以上の不等式を解くときのポイントとなる定理は次のものです。

定理 (不等式解法の原理)  $a, b$  を実数とする。

不等式解法の原理

$$ab > 0 \iff \text{「} a > 0 \text{ かつ } b > 0 \text{」 または 「} a < 0 \text{ かつ } b < 0 \text{」}$$

$$ab < 0 \iff \text{「} a > 0 \text{ かつ } b < 0 \text{」 または 「} a < 0 \text{ かつ } b > 0 \text{」}$$

言い替えると、「かけて正なら、二つの数は同符号である」、「かけて負なら、二つの数は異符号である」

証明 『 $ab > 0 \iff \text{「} a > 0 \text{ かつ } b > 0 \text{」 または 「} a < 0 \text{ かつ } b < 0 \text{」}』$  の  $\implies$  を証明しよう。

$ab > 0$  とする。

$a$  は  $a > 0$ ,  $a = 0$ ,  $a < 0$  の三つのうちのいずれかである。しかし  $a = 0$  なら  $ab = 0$  となり仮定に矛盾。よってありえない。つまり  $a > 0$  か  $a < 0$  のいずれかである。

(イ)  $a > 0$  の場合

$\frac{1}{a} > 0$  である<sup>1</sup>。ゆえに  $ab > 0$  の両辺に  $\frac{1}{a}$  をかけて

$$\frac{1}{a} \times ab > \frac{1}{a} \times 0$$

<sup>1</sup>証明は「実数の性質」『大小関係と四則計算』の節にあります。

よって

$$b > 0$$

つまり  $a > 0$  かつ  $b > 0$ 。

(口)  $a < 0$  の場合

このとき  $\frac{1}{a} < 0$  である。

問 64 これを示せ。

問 65  $a > 0$  の場合をまねして  $b < 0$  を導け。

次に  $\Leftarrow$  を証明しよう。

(イ)  $a > 0, b > 0$  の場合。

「不等式の性質」(3) より,  $ab > 0$ 。

(口)  $a < 0, b < 0$  の場合。

$-a > 0, -b > 0$  と (イ) より  $ab > 0$ 。

問 66 さらに, 以上のことをまねして,

$$ab < 0 \iff \text{「} a > 0 \text{ かつ } b < 0 \text{」 または 「} a < 0 \text{ かつ } b > 0 \text{」}$$

を証明せよ。

(証明終)

注意 先と同じく等号の入っている不等号  $\geq, \leq$  についても同様の定理が成立します。

ノートに書き下し, 証明を与えてください。

(注意終)

問 67 これを応用して  $abc > 0$  となるための必要十分条件を導け。

(この問いはちょっと難しい。しかしチャレンジするだけの価値はあります。

ヒント:  $a > 0$  の場合と  $a < 0$  の場合をそれぞれ検討せよ。その際, 上で証明した定理「不等式解法の原理」をうまく利用せよ。)

---

再録すると,  $\frac{1}{a} > 0, \frac{1}{a} = 0, \frac{1}{a} < 0$  のいずれかで,  $\frac{1}{a} = 0$  なら両辺に  $a$  をかけて  $1 = 0$  となり矛盾。

$\frac{1}{a} < 0$  なら両辺に  $a$  をかけて  $1 < 0$  となりこれも矛盾。

よって  $\frac{1}{a} > 0$ 。

さて、この「不等式解法の原理」を用いれば、2次以上の不等式を解くことができます。実際与えられた不等式の左辺が因数分解できれば、上の原理によって1次不等式へと問題を書き直すことができるからです。

具体例で使い方を示しましょう。

例 2次不等式  $x^2 - 5x + 6 > 0$  を解こう。この例の場合、左辺である  $x^2 - 5x + 6$  は  $(x - 2)(x - 3)$  と因数分解できます。つまりもとの不等式は  $(x - 2)(x - 3) > 0$  となります。

不等式解法の原理より、

$$\text{「}x - 2 > 0 \text{ かつ } x - 3 > 0\text{」 または 「}x - 2 < 0 \text{ かつ } x - 3 < 0\text{」}$$

(1) 「 $x - 2 > 0$  かつ  $x - 3 > 0$ 」の場合

前者より  $x > 2$ 、後方より  $x > 3$ 。「かつ」なので両方を同時に満たすものを考えれば  $x > 3$ 。

(2) 「 $x - 2 < 0$  かつ  $x - 3 < 0$ 」の場合

前者より  $x < 2$ 、後方より  $x < 3$ 。ふたたび「かつ」ということから  $x < 2$ 。よって

$$\text{「}x - 2 > 0 \text{ かつ } x - 3 > 0\text{」 または 「}x - 2 < 0 \text{ かつ } x - 3 < 0\text{」}$$

は

$$x < 2 \text{ または } 3 < x$$

と書き直すことができ、これが解となります。

(例終)

例 もう一つ例を挙げましょう。不等式  $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$  です。

今の場合両辺に  $-1$  をかけて  $x^2 + 2x - 3 \leq 0$  と書き直しておいたほうが解きやすいでしょう。これも左辺が因数分解でき、 $(x - 1)(x + 3) \leq 0$  となります。よって

$$\text{「}x - 1 \geq 0 \text{ かつ } x + 3 \leq 0\text{」 または 「}x - 1 \leq 0 \text{ かつ } x + 3 \geq 0\text{」}$$

先と同じように場合わけします。

(1) 「 $x - 1 \geq 0$  かつ  $x + 3 \leq 0$ 」の場合は、「 $x \geq 1$  かつ  $x \leq -3$ 」となります(先と同じようにしてこの結果を確かめよ)。

で、この二つを同時に満たす  $x$  は存在しません(分かりにくければ、数直線上に表して確かめよ)。つまりこちらからは解は出てきません。

(2) 「 $x - 1 \leq 0$  かつ  $x + 3 \geq 0$ 」の場合は、「 $x \leq 1$  かつ  $x \geq -3$ 」。これは  $-3 \leq x \leq 1$  と書き直せて、これがこの不等式の解となります。(例終)

以上の例を一般化すると次の定理にまとめられます(証明は上の解答例で出てくる数を  $\alpha, \beta$  にしただけなので、自分で書き上げることも可能でしょう。証明をみる前に各自試みてみてください)。

### 定理 (2次不等式の解法 その1)

2次式  $ax^2 + bx + c$  (ただし  $a > 0$ ) が  $a(x - \alpha)(x - \beta)$  と因数分解できるとする。

(ただし,  $\alpha, \beta$  は実数で  $\alpha < \beta$  とする。) このとき

2次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  の解は,  $x < \alpha$  または  $\beta < x$ 。

2次不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  の解は,  $\alpha < x < \beta$ 。

証明 まずは  $ax^2 + bx + c > 0$  の場合を示す。

仮定より左辺は  $a(x - \alpha)(x - \beta)$  と因数分解できるので, 元の不等式は

$$a(x - \alpha)(x - \beta) > 0$$

となる。

今  $a > 0$  なので, 両辺に  $\frac{1}{a}$  (これは正だった) をかけて,

$$(x - \alpha)(x - \beta) > 0$$

ゆえに「 $x - \alpha > 0$  かつ  $x - \beta > 0$ 」または「 $x - \alpha < 0$  かつ  $x - \beta < 0$ 」。つまり「 $x > \alpha$  かつ  $x > \beta$ 」または「 $x < \alpha$  かつ  $x < \beta$ 」。

$\alpha < \beta$  であることに注意すると, 「 $x > \alpha$  かつ  $x > \beta$ 」は  $x > \beta$ , 「 $x < \alpha$  かつ  $x < \beta$ 」は  $x < \alpha$  と書き直すことができるので, 結局2次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  の解は「 $x < \alpha$  または  $x > \beta$ 」であることが分かる。

問 68 同様にして「2次不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  の解は,  $\alpha < x < \beta$ 」であることを証明せよ。

(証明終)

### 注意

- (1) 定理中に  $a > 0$  という条件があることに注意。実際与えられた2次不等式の  $x^2$  の係数が負なら, 両辺に  $-1$  をかけることによって不等号の向きは変わりますが,  $a$  を正にすることができ, 結局上の二つのいずれかになります。よってこの場合のみを議論すればよいことになります。
- (2) 2次式  $ax^2 + bx + c$  はいつでもこのように因数分解できるわけではありません。不等式は実数の世界でしか意味を持たないので, この事実は重要です。因数分解できないような場合を含めて, 残りの場合についてはこの後で触れます。
- (3) 何度も注意しますが, 同様のことが等号を含む不等号  $\geq$  などの場合についてもいえます。どのような結果になるか, ノートに書き下してみてください。そして上の証明を真似して, 証明を書き上げてください。

(注意終)

この定理が得られたので, (もし結果を覚えていれば, ですが) 先の例のようにして2次不等式を解く必要はなくなります。次の例で使い方を説明しましょう。



例  $-x^2 - x + 2 < 0$  を解きましょう。

まず両辺に  $-1$  をかけて  $x^2 + x - 2 > 0$ 。左辺は  $(x + 2)(x - 1)$  と因数分解できるので、 $(x + 2)(x - 1) > 0$ 。

ゆえに  $x < -2$  または  $1 < x$ 。 (例終)

練習 129 次の不等式を解け。

(1)  $x^2 - 6x - 8 < 0$

(2)  $-x^2 + 4 \leq 0$

さて次に、左辺が先の定理の仮定のように因数分解できない場合について説明しましょう。

例 2次不等式  $x^2 - 4x + 4 > 0$  を考えましょう。

この例は、左辺は因数分解できます。しかし  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$  であって、先の定理のように二つの数  $\alpha, \beta$  はできません。それはちょっと置いておいて、与えられた不等式を書き直すと

$$(x - 2)^2 > 0$$

となります。

ここで思い出してほしいのが

$$a \text{ を実数とすると } a^2 \geq 0$$

という事実です。

実は今の場合もう少し厳密ないい方をすべきです。それは次のようにいうことができます。

$$a \text{ を実数とすると } a^2 \geq 0$$

$$\text{特に } a^2 = 0 \iff a = 0$$

これを今の場合に簡単に適用できるようにさらに言い直すと、

$$a \text{ を実数とすると } a^2 \geq 0$$

$$\text{特に } a^2 > 0 \iff a \neq 0$$

となります。

これを今の不等式  $(x - 2)^2 > 0$  に適用すれば、 $x - 2 \neq 0$ 。これは  $x \neq 2$  ということです。 (例終)

例 同じような例ですが、不等式が  $x^2 - 4x + 4 \geq 0$  ならどうでしょう。

先と同じように左辺を因数分解すれば  $(x - 2)^2 \geq 0$ 。

再び先の定理を思い出せば、左辺がどんな実数であってもこの不等式は成り立ちます。よって解は「すべての実数」となります。 (例終)

例 不等式が  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$  の場合はどうでしょう。

左辺を因数分解すれば  $(x-2)^2 \leq 0$ 。で、 $x$  が実数なら  $(x-2)^2 < 0$  となることはあり得ないので、 $(x-2)^2 = 0$  のときだけを考えればよいこととなります。これより  $x = 2$  を得ます。 (例終)

例 左辺が平方の形に因数分解される最後の例として  $x^2 - 4x + 4 < 0$  を見ましょう。

因数分解を実行して  $(x-2)^2 < 0$ 。先の例で触れたようにこのような条件を満たす実数は存在しません。つまり「解なし」です。 (例終)

問 69 以上の例での解き方を参考にして、

定理 (不等式の解法 その2) 2次式  $ax^2 + bx + c$  (ただし  $a > 0$ ) が  $a(x-\alpha)^2$  と因数分解できるとする。ただし  $\alpha$  は実数である。このとき、

2次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  の解は、 $x \neq \alpha$ 。

2次不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  の解は、「解なし」。

を証明せよ。

問 70 上の定理の  $\geq, \leq$  版を作り、証明せよ。

例  $x^2 + x + 1 > 0$  はどうでしょう。

これはすぐには因数分解できません。そこで  $x^2 + x + 1 = 0$  という方程式を解いてみると、解がないことがわかります。

言い替えると  $x^2 + x + 1$  は因数分解できません。

このようなときには左辺の  $x^2 + x + 1$  を平方完成をします。実行すると

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

これより元の不等式は

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

となります。

ここで  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$  は0以上で、 $\frac{3}{4} > 0$ 。つまり左辺は0以上のものと0より大きいものを加えたのですから、0より大きくなります。

よって左辺の  $x$  にどんな値を代入してもこの不等式は成立します。

つまり不等式  $x^2 + x + 1 > 0$  の解は「すべての実数」となります。 (例終)

例 最後に  $x^2 + x + 1 < 0$ 。

上の例と同様に，左辺を平方完成すると

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 0$$

先の例で検討したように左辺は0より大きい。ということは， $x$  にどんな値を代入してもこの不等式は成立しません。

つまり「解なし」。

(例終)

問 71 2次不等式  $x^2 + x + 1 \geq 0$ ， $x^2 + x + 1 \leq 0$  の二つをそれぞれ解け。

問 72 以上の例および問いを参考にして，

(1) 次の定理を証明せよ。

定理 (不等式の解法 その3) 2次式  $ax^2 + bx + c$  (ただし  $a > 0$ ) が実数の範囲で因数分解できないとき，

2次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  の解は「すべての実数」

2次不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  の解は「解なし」

(2) この定理の  $\geq$ ,  $\leq$  版を作り，証明せよ。

練習 130 次の2次不等式を解け。

(1)  $9x^2 - 12x + 4 > 0$

(2)  $2x^2 - 3x + 6 \leq 0$

(3)  $2x^2 - 3x + 2 > 0$

(4)  $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

(5)  $x^2 + 4x - 1 < 0$

(6)  $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

## 13.7 さらに勉強するために

2次不等式を解く方法として，関数を用いる方法と代数的な方法の二つを紹介しました。ここで紹介したいいずれの方法も，より高次の不等式，つまり3次不等式や4次不等式あるいはそれ以上の次数を持つ不等式へ応用ができそうなことにすぐに気がつくでしょう。

しかしたとえば関数を用いる方法で3次不等式を解こうとすると，対応する3次関数のグラフを描く必要がでてきます。残念ながら，今の私たちにはそれを簡単に行う方法がありません。もちろん具体的な値を(コンピュータなどで)くり返し計算し，グラフを描けばできなくはありません。ところが微分積分の計算技術を用いれば，そういったものがなくても比較的容易にグラフを描くことができます。これについては，本書の最後のテーマとなるでしょう。

一方，代数的な方法で3次不等式を解こうとすると，3次方程式を解く方法が問題になります。3次方程式の解の公式は知られているので，それを利用すれば3次不等式を解くことは原理的には可能です。

しかし高校では3次方程式の解の公式は扱わず，因数分解できるものだけを解けるようにすれば十分ということになっています。本書では後の章で，3次式の因数分解の方法を紹介します。

ということは，本文の問いで扱った

$abc > 0$  となる必要十分条件を求めよ。

が解けていれば，2次不等式の代数的解法をまねすれば3次不等式の解き方がわかるわけです。

どんな場合がありうるか，各自検討しておいてもらえると，後の章の内容を理解する手助けとなるでしょう。試みておいてください。