第II部

第16章　整式の性質

16.0　はじめに

第2章「整数の性質」の続きとして，ここでは「整式の性質」について解説します。

すでに少し予告しましたように，整数と整式はよく似た性質を持っています。それを解説するのが本章の目的の一つです。
今一つの目的は，ここで紹介する性質や計算法は，後で方程式を解くときに使われるのでその準備をすることにあります。
本章の目次と第1章「整数の性質」の目次を見比べてみてください。よく似ていることに気がつくでしょう。特に「ユークリッドの互除法」,「最大公約数と最小公倍数の関係」が大きな類似となっています。

補講15では，$x-\alpha$ の計算を簡単に行なうことができる,「組み立て除法」という計算方法を紹介します。
補講16では，x^n-1 の因数分解について簡単に触れます。
補講17では，整式が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるための必要十分条件を与えます。

16.1　剰余の定理と因数定理

この節では整数にはない，整式に特有の性質――剰余（じょうよ）の定理と因数定理――を紹介します。
そのために，一つ記号の使い方から始めましょう。

16.1.1　記　号

第2章「整式の基礎」の一番最初のところで，一つあるいはいくつかの文字に注目するという考え方を紹介しました。しかし式を書いただけでは，どの文字に注目しているのかはっきりしません。そこでたとえば，文字 x に注目しているとき，その式を $P(x)$ などと表わすことにします。

例　$P(x)=3x^3-4x+4$

$Q(x) = x^4 - ax + b$ **(例終)**

どの文字を使って式を表わすのかは特に決まりはありません。時に応じて使い分けることになります。臨機応変(りんきおうへん)に対処してください[1]。

また $P(x)$ などの x は，どの文字に注目しているかを示しています。よってたとえば上の例の $Q(x)$ には文字が三つ入っていますが，x に関する式であると考えています。

さてこの後すぐに使うことになりますが，式が与えられたとき，その式に含まれる文字にいろいろな値を代入し，その結果を使いたいことがあります。式を $P(x)$ などと表わす記号は，こういった時にも便利です。

定義 (式の値)　x についての整式 $P(x)$ において，$x = a$ を代入したときの式の値を $P(a)$ と表わす。 **(定義終)**

例　$P(x) = x^3 - 7x + 4$ とするとき

$$
\begin{aligned}
P(2) &= 2^3 - 7 \times 2 + 4 = 8 - 14 + 4 = -2 \\
P(-1) &= (-1)^3 - 7 \times (-1) + 4 = -1 + 7 + 4 = 10 \\
P(a) &= a^3 - 7a + 4 \\
P(b+1) &= (b+1)^3 - 7(b+1) + 4 = b^3 + 3b^2 - 4b - 2 \\
&\quad \text{（3 乗の展開公式を覚えてますか？）}
\end{aligned}
$$

(例終)

単に数を代入して計算するだけでなく，a とか $b+1$ のような式を代入する例が挙がっていることにも注目してください（a を代入するということは，x を a で置き換える以上の効果はありません。しかしこれは後でよく使われます)。特に $b+1$ を代入して計算するといったことに，よく慣れておいてください。その際，上の例のように，かっこを使って代入するということを忘れないように。

練習 171 $P(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ について次の値を計算せよ。

(1) $P(1)$　　(2) $P(-2)$　　(3) $P(-b)$　　(4) $P(a+1)$

---

[1]どのような文字を使って式を表わすのかについては，その人の癖(くせ)（あるいは習慣）があるようです。私は整式を表わすときには P を，関数を表わすときには f を使うようにしています。これは多項式のことを英語で polynomial，関数を function というところから，(記号をみただけで，私自身に想起させたいし，読んでいる人にもそういった意識を伝えたいので）このような記号の使い方をしています。よって他の書物を見るときには注意してください。

また二つ以上の整式を表わすときには「整式 P, Q 」というように，それに続くアルファベットを使うことが多い（関数の場合は f, g, h など)。このあたりは大分安直(あんちょく)ですね。

16.1.2　剰余の定理

第 2 章で整式の割り算をやりました。その計算は整数の割り算と同じく結構面倒なものでした。剰余の定理とは，整式を $x-\alpha$ のような 1 次式[2] で割ったときの余りに関する定理です[3]。この定理は，この場合の余りに限り，簡単に計算する方法を与えてくれます。

定理 (剰余の定理)　整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ に等しい。　**剰余の定理**

証明　$P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とする[4]。除法の原理より，

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$$

よって

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + R \\ &= 0 \times Q(\alpha) + R \\ &= R \end{aligned}$$

ゆえに整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ に等しい。　**(証明終)**

注意　割っている式に出てくる α は x から引いているのに対して，P に代入している値は α であることに注意してください。

よってたとえば $x+\alpha$ で割ったときには $x+\alpha = x-(-\alpha)$ と考えて $-\alpha$ を代入することになります。　**(注意終)**

例　$P(x) = x^3 - 4x + 1$ を $x-2$ で割ったときの余りは

$$P(2) = 2^3 - 4 \times 2 + 1 = 1$$

より 1 です。

また $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは

$$P(-1) = (-1)^3 - 4 \times (-1) + 1 = 4$$

であるから，4。　**(例終)**

[2] α は「アルファ」と読みます。アルファベットの a に相当する，ギリシャ文字です。実際アルファベットの a に似ているので注意してください。

[3] 剰余とは余りの漢語的な表現です（剰の意味を漢和辞典で調べよ）。

[4] 除法の原理より，1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは 0 か 0 次式（つまり数）になります。よってそこには文字が含まれないので「余りを R とする」としました。

細かいことですが，気がついておいてほしい。

問 96 上の $P(x)$ を実際に $x-2$ や $x+1$ で割って，余りがそれぞれ $1,\ 4$ になることを確認せよ。

練習 172 $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$ を $x+1,\ x-2,\ x+3$ で割ったときの余りを，それぞれ求めよ。

このように，割り算したときの余りは簡単に計算できます。しかし剰余の定理にも限界があります。

それは余りを計算することができても，この定理からは商はいくらなのかはまったくわからないということです（簡単に商が分かるような定理があると，ほんと便利なのですがねぇ。残念ながら世の中そんなに甘くない）。もっとも，数学をもう少し深く勉強していくと，商よりは余りの方が重要なことが多いということに気がつくでしょう。そして理論的には剰余の定理と除法の原理だけでもそんなに不都合は生じないのです。

例題 55 $Q(x)=x^3+2x^2+ax+4$ を $x+1$ で割ったときの余りが 12 となるように，定数 a の値を定めよ。

解説　剰余の定理のやさしい応用です。

剰余の定理によって，$Q(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは $Q(-1)$ で計算できます。実際に代入して整理すると a についての式ができ，これが 12 に等しいので，a に関する方程式ができ，後はこれを解けばよいということになります。

解答例　$Q(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りは

$$Q(-1)=-1+2-a+4=-a+5$$

これが 12 に等しいので

$$-a+5=12$$

これを解いて

$$a=-7\ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 173 $P(x)=x^3+x^2+ax-2$ を $x-2$ で割ったときの余りが 8 となるように，定数 a の値を定めよ。

例題 56 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが 4，$x-3$ で割ったときの余りが 6 であるとき，$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解説　剰余の定理は1次式で割ったときの余りを出すだけなので，使える範囲が狭いのではないか，と考えた人もいるかもしれません。しかし，この例題くらいの条件があると，2次式で割ったときの余りを計算することができます。よく味わってください。

さて問題の設定「整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが 4，$x-3$ で割ったときの余りが 6 であるとき」に剰余の定理を適用すると，

$$P(2)=4, \qquad P(3)=6$$

を得ます。

同様に問題の要求「$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ」を考えれば，$(x-2)(x-3)$ は2次式ですから，その余りの次数は1次以下。つまり $ax+b$ (ただし a, b は定数) という形をしているはずです。よって，a と b を求めればよいことになります[5]。

また $P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を (これはどんな形をしているのか全く分からないので) $Q(x)$ とすれば，除法の原理より，

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$$

と表すことができます。

次にこの式の両辺の x に 2 (この 2 は $x-2$ の 2 である) を代入すると，

$$P(2)=(2-2)(2-3)Q(2)+2a+b$$

となります。右辺の第一項 $(2-2)(2-3)Q(2)$ は $2-2=0$ ですから，$0\times(-1)\times Q(2)=0$。一方，先に $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが 4 であるという条件から作った $P(2)=4$ より

$$4=2a+b\cdots\cdots(1)$$

を得ます[6]。

同様にして $x=3$ を代入することで，

$$6=3a+b\cdots\cdots(2)$$

を得ます。

$a,\ b$ は (1)，(2) の両方を満たしているはずですから，これらを連立させて解くことにより $a,\ b$ を求めることができます。

では答案にまとめましょう。

---

[5] $ax+b$ と書くと，1次式のように見えるかもしれませんが，問題によっては $a=0$，つまり余りが定数のこともありうるので注意。さらに付け加えておくなら，$a=0,\ b=0$ の場合も考慮されています。

[6] ちょっと余計なことですが，このような結果を得るときに，商 $Q(x)$ の形が分からなくても全く問題がなかったことに気を留めておいてほしい。これこそが記号の威力なのです。

解答例　$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$$

また整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが 4，$x-3$ で割ったときの余りが 6 であるから，

$$P(2)=4, \qquad P(3)=6$$

ゆえに，

$$\begin{cases} 2a+b=4 \\ 3a+b=6 \end{cases}$$

これを連立させて解くと，$a=2,\ b=0$。

よって余りは

$$2x \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 174 x の整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが 1，$x+3$ で割ったときの余りが -9 であるとき，$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

この節の最後に。

剰余の定理において割る式は $x-\alpha$ という形の 1 次式でした。これをもう少し一般的な形に拡張しましょう[7]。

定理 (拡張された剰余の定理)　整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ に等しい。

問 97 「拡張された剰余の定理」を証明せよ。

練習 175 $S(x)=x^3+2x^2-x-3$ を $2x-1$ で割ったときの余りを求めよ。

[7]「一般的な形に拡張する」というのは，拡張された定理の特別な場合を考えると元の定理になるように，定理の主張を変えることです。もちろん，どんな定理に対してもその拡張があるとは限りません。

今話題になっている剰余の定理でいうなら,「拡張された剰余の定理」 の a,b をそれぞれ $1,-\alpha$ とすれば，元々の剰余の定理が得られます。よって「拡張された剰余の定理」は，剰余の定理の拡張になっています。

16.1.3　因数定理

繰り返し述べていますが，割り切れる特別な場合に興味があります。

整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったとき余りが 0 になる，つまり割り切れる，という特殊な場合を考えましょう[8]。

次がすぐに分かります。

系 (因数定理)　整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる　$\Longleftrightarrow$　$P(\alpha)=0$　**因数定理**

証明　まず $P(\alpha)=0$ ならば $P(x)$ が $x-\alpha$ で割りきれることを示そう。

剰余の定理によると，整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$ であった。一方，$P(\alpha)=0$ と仮定したので，余りは 0。つまり整式 $P(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる。

問 98 上の逆,「整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるならば $P(\alpha)=0$」を証明せよ。

以上をあわせれば，定理を得る。　**(証明終)**

この定理は，与えられた整式がどのようなときに $x-\alpha$ で割り切れるかどうか，つまり $x-\alpha$ が与えられた整式の因数になっているかどうかの判定法を与えていることになります。これが「因数」定理の名の由来です。

例を挙げましょう。

例　$P(x)=x^3-3x-2$ とします。

$$P(2)=2^3-3\times 2-2=0$$

ですから，$P(x)$ は $x-2$ で割り切れます。

一方

$$P(1)=1^3-3\times 1-2=-4$$

ですから，$P(x)$ は $x-1$ では割り切れません。　**(例終)**

練習 176 $x-1,\ x+1,\ x+2,\ x-3$ の中で整式 $P(x)=x^4+2x^3-x-2$ を割り切るものはどれか。すべて挙げよ。

よって因数定理を使うと，整式を因数分解することができます。

例題 57 $P(x)=x^3-5x^2+2x+8$ を因数分解せよ。

[8]先の「拡張」に対して，特別な場合を考えることを「特殊化」ということがあります。つまり剰余の定理を特殊化すると，因数定理が得られるのです。

解説　こういうタイプの整式には因数分解の公式が公式が適用できません。よって別の方法を用いることになります。その方法とは因数定理です。

上に述べたように，因数定理を使うことによって，考えている 1 次式がこの整式を割り切るかどうか，いいかえると因数になっているかどうかが判定できます。で，問題は，どうやってその因数を見つけたらよいのか，ということです。

数は無数にありますから，めったやたらに代入しても 0 になるとは限りません。そこにはある種の戦略が必要となります。以下一般論で考えるので，ちょっとわかりにくいかもしれませんが，がんばってついていきてください。

与えられた整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ を因数にもったとしましょう。

因数分解すると，

$$P(x)=(x-\alpha)(a_0x^n+\cdots+a_n)$$

となります。で，因数分解したばかりですが，右辺を展開すると（なぜこんなことをするのかはすぐあとで明らかになります），

$$P(x)=a_0x^{n+1}+\cdots-\alpha a_n$$

となります。この展開した結果の定数項に注目しましょう。

いま定数項は $-\alpha a_n$ です。一方今考えようとしている問題の定数項は 8 ですから，

$$-\alpha a_n=8$$

この式より α は 8 の（負の数まで込めた）約数になっていることが分かります[9]。

つまり代入すべき α の候補として $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$ の八つを考えればよく，式をにらみながら何を代入すれば 0 になるかを考えればよいのです。

「にらみながら」とは書きましたが，実際にはいくつか試しに計算をする必要があるでしょう。どれを代入したら 0 になるでしょうね。これは，試行錯誤して見つけるほか方法はありません。経験を積めば，そんなに何度も試さなくても見つけられるようになるでしょう。それまでは，大変でも頑張るしかありません。

さて，今の場合，-1 を代入すると，

$$\begin{aligned}P(-1)&=(-1)^3-5\times(-1)^2+2\times(-1)+8\\&=-1-5-2+8\\&=0\end{aligned}$$

となり，$P(x)$ が $x+1$ で割り切れることが判明します。

[9]厳密にいうと $a_0x^n+\cdots+a_n$ の係数や α は実数なので，整数の世界の意味での約数になっているとは限りません。しかし，我々が高校レベルの数学で出会うものについてはこう考えても支障はありません。

それに次にあるように，こうして得られる数たちはあくまでも「候補」です。つまり代入して 0 になるものがその中から見つかればラッキー，だめなら他の方法を考えましょう，という程度のものなので，あまり深刻に悩む必要もないのです。

因数分解して（具体的には $P(x)$ を $x+1$ で割って商を計算します。このあたりに先に述べた剰余の定理（今の場合は因数定理であるが）の欠点が顕(あら)わになっています）[10],

$$P(x) = (x+1)(x^2-6x+8)$$

もう一つの因数 x^2-6x+8 は $(x-2)(x-4)$ と因数分解できるので，結局

$$x^3-5x^2+2x+8 = (x+1)(x-2)(x-4)$$

という因数分解を得ます。

解答例

$$x^3-5x^2+2x+8 = (x+1)(x-2)(x-4)$$

(解答例終)

補注　解答例を見れば分かるように，ここでは結果だけが示され，途中経過が一切省かれています。実際，こういった次数の高い整式の因数分解は，ほかの問題を解く途中で必要となる計算なので，解説に記した計算は解答用紙の裏で行ない，結果のみを書くだけで十分です。 **(補注終)**

練習 177 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-7x+6　　(2) x^3-2x^2-5x+6
(3) $x^3-6x^2+12x-8$　　(4) $x^4+3x^3-5x^2-3x+4$
(5) $x^4-x^3-7x^2+x+6$

因数定理は，ある整式が別の 1 次式で割り切れるかどうかを判定する方法を与えています。言い換えると，与えられた整式を因数分解をするときに有効なわけです。そのような例を上で見ました。

これを因数分解の公式に応用してみましょう。たとえば

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

だったのですが，これを覚えるのに苦労した人がいたのではないでしょうか？　因数定理を使えば，覚えずとも自分で導き出すことができます。それを見ましょう。

[10] こういった割り算を比較的簡単に計算する方法として,「組み立て除法」という方法が知られています。これについては，補講で解説しましたので，よく読んで，身につけておいてください。

実際 a^3-b^3 を a に関する式と見て $P(a)=a^3-b^3$ とおきましょう[11]。これに何を代入したら 0 になるでしょう？　その候補は？

とまあ，気負う必要もなく，a に b を代入すれば

$$P(b)=b^3-b^3=0$$

となり，$P(a)$ が $a-b$ で割り切れることが分かります。

後は実際に a^3-b^3 を $a-b$ で割ることで，a^3-b^3 の因数分解の公式を得ます。

しかしこれはあくまでも公式を忘れてしまったときの非常手段としておいてほしいものですね。実際，公式を覚えておいて使うのと，使うたびに導くのでは，計算にかかる時間が格段に違ってきます。試験など制限時間のあるときなどは，致命的になりかねないのであるから。

16.2　約数と倍数

以上で準備が整いました。約数と倍数の話を始めましょう。

まずは言葉を定めます。

定義 (約数，倍数)　　整式 A と整式 B について

$$A=BQ$$

となるとき，

　　B **を** A **の約数**　　**約数**

　　A **を** B **の倍数**　　**倍数**

という。　**(定義終)**

式についてのことなのに約「数」とはちょっと抵抗がありますが，これが数学の習慣になっているようです。倣(なら)ってください。

例　$x^3-5x^2+2x+8=(x+1)(x^2-6x+8)$ ですから，$x+1$ は x^3-5x^2+2x+8 の約数であり，また x^3-5x^2+2x+8 は $x+1$ の倍数です。　**(例終)**

第 2 章「整数の基礎」でやったように，すべての約数を求めるには素因数分解して，すべての組み合わせを作ればできました。整数の世界と整式の世界では，素

[11] ここで第 2 章でやった，ある文字に注目するという考え方を思い出してください。

また本章では整式を $P(x)$ というように，x を主にして話をしてきているので $P(a)$ と書くと奇異(きい)に感じる人もいるかもしれません。確かに整式を考えるとき（後で扱う方程式などのこともあるので）注目する文字として x を使うことが多く，一方 a,b などは定数を表わす文字として使うことが多いのが普通です。しかしそれはあくまでも習慣であって，絶対ではありません。話の流れによって視点は変わるのですから，そういった考え方のできる柔軟な頭を拵(こしら)えるように心がけてほしい。

因数分解と因数分解が対応しているので，整式のすべての約数を求めるには与えられた整式を因数分解しておけばよいことになります。これがここまで因数分解に執着した理由です。

16.3　公約数と公倍数

16.3.1　公約数と公倍数

次に公約数と公倍数の問題へ進みましょう。まずは定義から。

定義 (公約数，最大公約数)　2 個以上の整式に共通な約数を，それらの **公約数**（こうやくすう）という。また公約数の中でもっとも次数の高いものを **最大公約数**という。**(定義終)**　**公約数**　**最大公約数**

定義 (公倍数，最小公倍数)　2 個以上の整式に共通な倍数を，それらの **公倍数**（こうばいすう）という。また公倍数の中でもっとも次数の低いものを **最小公倍数** という。**(定義終)**　**公倍数**　**最小公倍数**

注意　整式の世界で，整数の世界の大小に対応するものは整式の次数でした。それを使って最大公約数の定義が言い直されていることに注意してください。**(注意終)**

例　$a^2bx^2y^3$ と a^2b^3xy の最大公約数は a^2bxy であり，最小公倍数は $a^2b^3x^2y^3$ です。**(例終)**

この例のような場合は，整数が素因数分解されているものと同じように考えることができるので，最大公約数の場合は両方に共通する因数を，最小公倍数の場合はいずれかの因数になっているものを選び，かけ合わせればよいわけです。

例題 58 x^3-3x^2+2x と x^4-10x^2+9 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

解説　整数のときに素因数分解して最大公約数と最小公倍数を求めたように，整式の場合も因数分解していきます。そして最大公約数のときは共通する因数のみを，最小公倍数のときはいずれかに入っている因数を取り出してかけ合わせれば求められます。

解答例　それぞれの式を因数分解すると，

$$\begin{aligned} x^3-3x^2+2x &= x(x-1)(x-2) \\ x^4-10x^2+9 &= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

よって

最大公約数は $x-1$ ，最小公倍数は $x(x+1)(x-1)(x-2)(x+3)(x-3)$ $\cdots$ **(答)**

(解答例終)

補注　最小公倍数を展開していませんが，これはこのままでも構いません。問題などの要求で，必要ならば展開すればよいことです。 **(補注終)**

練習 178 次の各組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。
(1) $b^2,\quad b^3c^2$
(2) $(x+1)(x-2),\quad (x+2)(x-2)$
(3) $(x+1)(x-2)^2,\quad (x-2)^3(x-1)^2$
(4) $x^2+6x+8,\quad x^2+5x+6$
(5) $x^2+x-6,\quad x^2+4x+3,\quad x^2+3x$
(6) $x^3+4x^2-3x-18,\quad x^3+4x^2-9x-36$

16.3.2 ユークリッドの互除法

　整数において最大公約数を求める方法は二つありました。一つは素因数分解を用いる方法，もう一つはユークリッドの互除法によるというものでした。先の節までの内容が整数のときとほとんど同じであったことから，整式においても互除法が使えそうなことが想像できるでしょう。実際，それが可能なこと，つまり「互除法の原理」が成り立ちます。 **ユークリッドの互除法**
　証明は整数の場合の証明を一つ一つチェックし，必要なところを整式の場合に書き直せばできるので演習問題としておきます。その時必要となる言葉を一つ定めておきましょう。

定義 (互いに素)　二つの整式の最大公約数が (0 でない) 定数であるとき，その二つの整数は **互いに素**である，という。 **(定義終)** **互いに素**

注意　整数のときは，最大公約数が 1 のとき互いに素である，といいました。整式の場合には定数，つまり 0 次式のときをいうので注意してください。 **(注意終)**

　整式の場合の互除法の原理は下のようになります。意欲のある人は証明を試みてください（もちろん信用し，先に進んでも構いません)。

定理 (互除法の原理)　二つの整式 A, B に対して A を B で割ったときの商を Q，余りを R とする。このとき A と B の最大公約数は， B と R の最大公約数に等しい。 **互除法の原理**

問 99 整数の場合の互除法の原理（第 1 章「整数の性質」 参照）の証明をまねして，整式の場合の互除法の原理の証明を書き上げよ。

　整数のときは段々小さくなって最後には必ず割り切れたのと同じように，整式の場合も次数が段々小さくなっていき，最後には必ず割り切れます。

例題 59 x^3-3x^2+2x と x^4-10x^2+9 の最大公約数を求めよ。

解説　これは先に挙げた例題と同じ問題です。ここでは，ユークリッドの互除法を用いて最大公約数を求めてみましょう。

やりかたは整数のときと同じです。まずは x^4-10x^2+9 を x^3-3x^2+2x で割ります。すると余りは $-3x^2-6x+9$ 。次に x^3-3x^2+2x を $-3x^2-6x+9$ で割ります。このとき，商の立て方をきちんと理解している人にとっては何でもないが，中にはちょっと困る人がいるかもしれません。実際，$-3x^2$ に何をかけたら x^3 になるかを探すのですが，何をかけたらいいのでしょう？　実は $-\dfrac{1}{3}x$ をかければよい。

こんなケースは整数のときには現れなかったし，整式の割り算の計算練習ではこういったものは避けてきたので，戸惑う人もいることでしょう。しかし整式の割り算の説明をそのまま適用すれば，こうせざるをえません。割り算の説明をもう一度読んでください。すると,（今の場合は商は必要ないのですが）商は $-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$ ，余りは $15x-15$ になります。

以下同様に $-3x^2-6x+9$ を $15x-15$ で割ると今度は割り切れます（再び商の係数は分数となります)。よって最大公約数は $15x-15$ となります。

さて，ちょっと困りました。方法は違うにせよ，最大公約数を計算したのに，結果が異なってしまったのです。

しかしよく見ましょう。$15x-15=15(x-1)$ です。すると違いは 15 倍されているかどうかだけです。

これはいつの場合もそうなることが知られています。そこで整式の約数や倍数については次のような約束を設けています。

約束　整式の約数，倍数を考えるときには数の因数の違いは無視をし，同じものとみなす。

この約束を使うと因数分解して得られる結果と，互除法によって得られる結果は同じとみなすことができ，問題はなくなります。

最大公約数は $x-1\cdots$ **(答)**

16.3.3　最大公約数と最小公倍数の関係

これほど整数と整式は同じような性質を持っています。残っている性質は次のものですが，これらも整式においても成り立ちます。意欲のあるものはぜひ証明に挑戦してください。

定理 (公約数の性質)　公約数は最大公約数の約数である。

定理 (公倍数の性質)　公倍数は最小公倍数の倍数である。

系 (最大公約数と最小公倍数の関係)　二つの整式 $A,\ B$ の最大公約数を D，最小公倍数を L とするとき，

$$AB=DL$$

が成り立つ。

定理 (最小公倍数)　$A,\ B$ の最大公約数を D とし，$A=A'D,\ B=B'D$ とするとき，A' と B' は互いに素で，最小公倍数は $A'B'D$ となる。

問 100 整数の場合をまねして，上の諸定理を証明せよ。

次の例題と同じようなものを整数の場合にやっています。比較検討してみてください。

例題 60 二つの 2 次の整式の最大公約数が $x+2$ ，最小公倍数が $2x^3+3x^2-2x$ である。この二つの整式を求めよ。

解説　求める二つの整式を $A,\ B$ とでもすると，

$$A=A'(x+2),\quad B=B'(x+2)$$

と書け，A' と B' は互いに素です。また最小公倍数は $A'B'(x+2)$ となります。よって最小公倍数を因数分解し（一つの因数が $x+2$ と分かっているからこれは簡単でしょう），$A',\ B'$ に相当するものを取り出せば，簡単に $A,\ B$ を求めることができます。その際，求めるべき式がいずれも 2 次式なので，A' も B' も 1 次式でなければならないことに注意してください。

解答例　求める二つの整式を $A,\ B$ とすると，

$$A=A'(x+2),\quad B=B'(x+2)$$

と書け，A' と B' は互いに素である。

また最小公倍数を因数分解すると，

$$2x^3+3x^2-2x=x(x+2)(2x-1)$$

$A,\ B$ は 2 次式なので，$A',\ B'$ はいずれも 1 次式でなければならない。よって $A'=x,\ B'=2x-1$ としてよい。

ゆえに二つの整式は

$$x(x+2) \text{ と } (2x-1)(x+2) \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

補注　A と B はどこにいったのか，と問う人がいるかもしれません。問題をよく読みましょう。問題の要求は「二つの整式を求めよ」であって,「A と B は何か」ではありません。A と B は問題を解くために自分で便宜(べんぎ)的に定めた記号であって，問題で定められたものはありません。ということから，答えには $A,\ B$ が出てこないのです。　**(補注終)**

練習 179 $P,\ Q$ はそれぞれ実数係数を持つ 2 次，3 次の整式とし，最高次数の係数はいずれも 1 とする。$P,\ Q$ の最大公約数が $x+1$ ，最小公倍数が $x^4+3x^3+4x^2+3x+1$ であるとき，$P,\ Q$ を求めよ。

16.4　さらに勉強するために

本章の一つの大きなテーマは,「整数と整式の類似の追求」でした。いくつかの概念を若干修正するだけで，整数と整式ではまったく同様の定理が成り立つ。これは驚くべきことです。

この類似はさらに「環論(かん)」と呼ばれる代数学の一分野に抽象化されていき，幅広い応用が見出されていきます。 **環論**

この方面への，入門書として

松阪和夫著,「代数系入門」　岩波書店 (1976)

この本は，第 1 章「整数の性質」でも紹介しました。

また,

中島匠一著,「代数と数論の基礎」　共立出版 (2000)

も挙げておきましょう。

この本は，本書第 1 章と同じく，整数論の初歩からはじまり，代数学の基本的な概念である，群，環，体の理論を解説しています。

さらに詳しいことを知りたいときには，上に挙げた 2 冊はよいガイドブックとなってくれることと思います。