第17章　分数式

17.0　はじめに

本章では分数式を解説します。これは，分数との類似です。

なぜここで分数式の話がでてくるのか，不審に思う人がいるかもしれません。しかしこれは整数と整式とが対応するように，分数とそれに対応するものがあり，それが分数式と呼ばれ，分数と同様の計算ができるという事情にあります。ここでも，分数と分数式の類似，および整数や整式の理論との関わりに重点を置いて話を進めましょう。それによって分数の計算もよく理解でき，すばやく計算ができるようになることでしょう。

17.1　分数式とは

まずは数の場合において，分数とか有理数とかは何を表わすのかということについて，きちんと定めておきましょう。

定義 (有理数，分数，分子，分母)　m, n （ただし $m \neq 0$ ）を整数とするとき

$$\frac{n}{m}$$

と表わすことのできる数を **有理数** (**rational numbers**) という。

特に $m \neq 1$ のとき **分数** という。

このとき n を **分子**，m を **分母** という。 **(定義終)**

rational numbers
有理数
分数
分子
分母

上の定義に従うと，整数は有理数であるともいうことができます。実際，たとえば3は

$$3 = \frac{3}{1}$$

と表わすことができるので，有理数です。つまり整数は有理数の特別なものとなっています。この意味で「整数の集まりを有理数の集まりに拡張した」ということができます。

有理数のまねをして，有理式を定義します。

定義 (有理式，分数式，分子，分母)　A, B （ただし $B \neq 0$ ）を整式とするとき

$$\frac{A}{B}$$

と表わすことのできる式を **有理式**という。 **有理式**

特に B の次数が 1 以上であるとき **分数式**という。 **分数式**

また A を **分子**，B を **分母** という。 **(定義終)** **分子** **分母**

注意　整数のときと同様に，整式は分母が 1 であると考えることができるので，整式は有理式であるということもできます。

また B の次数が 0(つまり 0 以外の定数) のとき，たとえば $A = x^2 + 2x + 3$，$B = 2$ のようなときには

$$\frac{A}{B} = \frac{x^2 + 2x + 3}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

と変形できるので整式と考えることができます。分母の次数が 1 以上のものを有理式と呼ぶことにしたのは，このような理由によるのです。 **(注意終)**

17.2　約分・通分

17.2.1　約　分

この節の目標は分数式の計算にありますが，準備として分数の場合と同様に約分や通分という考え方を説明する必要があります。簡単に説明しておきましょう。

分数には次のような性質があります。

定理 (分数の性質)

$$\frac{n}{m} = \frac{n \times c}{m \times c}, \quad \frac{n}{m} = \frac{n \div c}{m \div c}$$

左辺から右辺を導くような形に書いてありますが，普通は第一式の右辺から左辺の形に変形します。実際

$$\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{3}$$

などとやっていました。このような変形を **約分** と呼びました。 **約分**

分数式においても同様の変形が可能です。つまり

定理 (分数式の性質)

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C}$$

たとえば,

例

$$\begin{aligned}\frac{4a^2b}{6ab^2} &= \frac{2ab\times 2a}{2ab\times 3b}=\frac{2a}{3b}\\ \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} &= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-1)}=\frac{x-2}{x-1}\end{aligned}$$

(例終)

分数の場合と同様に，このような変形を分数式の **約分** といいます。 **約分**
また

定義 (既約分数，既約分数式) それ以上約分できない分数を **既約(きやく) 分数** という。 **既約分数**
同様に，それ以上約分できない分数式を **既約分数式** という。 **(定義終)** **既約分数式**

分数はできるだけ約分する，つまり既約分数で表わすという約束があったのと同様に，分数式も既約分数式に変形するという約束をします。

注意 既約分数はそれ以上約分できないのですから，その分母と分子は互いに素です。よって与えられた分数が既約であるかどうかを見るには，分母と分子の最大公約数を求めてみればよいことになります。

これは分数式についても同様です。 **(注意終)**

例題 61 $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$ を約分せよ。

解説 分数を約分するときに，分子と分母の公約数を見付けなければならなかったのと同じように，分数式の場合にも分子と分母の公約数を見つけなければなりません。

公約数を見つけるために，それぞれを (素) 因数分解しました。そこで分母と分子をそれぞれ因数分解すればよいことになります。約分せよという問題なのだから，必ず約分することができるはずです。

解答例

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=\frac{x-1}{x+2}\cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 180 次の式を約分せよ。

(1) $\dfrac{12a^2b^3}{15a^5b^2}$ (2) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ (3) $\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$

17.2.2 通　分

分数の計算では足し算や引き算をするために分母をそろえる，つまり **通分**をしました。

分数式の場合も同様なことができます。たとえば，二つの分数式 $\dfrac{3}{x}$ と $\dfrac{x}{x+3}$ が与えられたとき

$$\frac{3}{x} = \frac{3(x+3)}{x(x+3)}, \quad \frac{x}{x+3} = \frac{x^2}{x(x+3)}$$

のように分母が同じ式に直すことができます。

注意　分数のとき，共通する分母は与えられた分数の分母の最小公倍数をとればよかった。分数式のときも同様です。 **(注意終)**

例題 62 次の分数式を通分せよ。

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}, \quad \frac{x-3}{x^2-x-6}$$

解説　それぞれの分母を因数分解すると，

$$\begin{aligned} x^2-5x+6 &= (x-2)(x-3) \\ x^2-x-6 &= (x-3)(x+2) \end{aligned}$$

よって与えられた分数式の分母の最小公倍数は $(x-2)(x+2)(x-3)$。あとは（約分のときには逆に使った）

$$\frac{A}{B} = \frac{A\times C}{B\times C}$$

を用いれば，通分できます。

解答例

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x^2-5x+6} &= \frac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-3)} \\ \frac{x-3}{x^2-x-6} &= \frac{x-3}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

(解答例終)

練習 181 次の各組の分数式を通分せよ。

(1) $\dfrac{x-3}{x^2-x-2}, \quad \dfrac{x+2}{x^2+2x+1}$　　(2) $\dfrac{1}{x+y}, \quad \dfrac{1}{y-x}$

17.3　分数式の加減乗除

さていよいよ分数式の四則計算です。
先の節までの準備ができているので，基本的には分数の計算とまったく同様です。

17.3.1　加・減

分数式の加減は， $A,\ B,\ C$ を整式とするとき

$$\frac{B}{A}+\frac{C}{A}=\frac{B+C}{A},\quad \frac{B}{A}-\frac{C}{A}=\frac{B-C}{A}$$

によって計算します。

分母の異なる分数式は，通分してから計算します。また，計算結果は約分し，既約分数式に直します（もちろん約分できる場合だけです)。

例題 63 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ を計算せよ。

解説　分母が異なるので，まずは通分することから始めます。

解答例

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{x+2}{x(x+1)(x+2)}+\frac{x}{x(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{x+2+x}{x(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)}\\ &= \frac{2}{x(x+2)}\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(解答例終)

練習 182 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{2}{x^2-4}$

(2) $\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}$

(3) $\dfrac{3}{x^2+x-6}-\dfrac{5}{x^2-x-12}+\dfrac{2}{x^2-6x+8}$

例題 64

$$\frac{x+2}{x}-\frac{x+3}{x+1}-\frac{x-5}{x-3}+\frac{x-6}{x-4}$$

を計算せよ。

解説　分数式の計算の例をもう一つ挙げておきましょう。

この問題は一見，全部通分し，分母を $x(x+1)(x-3)(x-4)$ にすれば簡単であるように思えます。しかしよく考えましょう。それぞれの分子は 1 次式。そして通分することによって分母・分子にかける式はいずれも 3 次式。つまり分子は 4 次式になります。これでは，分子を展開して整理するだけでかなりの手間がかかってしまいます。

ではどうすればよいのでしょう。

手がかりを探すためには，似たような問題を考えればよい。今の場合，分数式の計算ではなく，分数の計算で探すべきです。では，どのような問題が似ているといえるのでしょう?

上で問題になったのは，分子の次数が 4 次というように，かなり高いものになったことです。そして整数の大小と，整式の次数が対応していたのですから，分数で通分すると分子が大きくなるようなものの計算をどうやるかを考えればよいでしょう。

たとえば次の計算はどのようにやったらいいでしょう。

$$\frac{7}{3}+\frac{9}{4}-\frac{21}{5}$$

通分すると分母は 60。分子はかなり大きくなり，面倒です。なぜ分子が大きくなるのかを考えてみると，これは分子が分母より大きいことが原因であることが分かります。言い換えると，分数が仮分数であるから計算が面倒なのです。よって分子を小さくすればよい。そのためにはそれぞれの分数を帯分数に直せばいいですね。

上の式を帯分数[1] に直すと，

$$2+\frac{1}{3}+2+\frac{1}{4}-\left(4+\frac{1}{5}\right)$$

よって

$$\frac{7}{3}+\frac{9}{4}-\frac{21}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

となり，右辺の計算は比較的楽になります。

以上をまとめると，仮分数は帯分数に直して計算すれば，計算が楽になることがある，ということです。

では例題に戻って，ここではどうやればよいのでしょう？　そのためにはもう一度分数において，仮分数を帯分数に直す方法を観察すればよい。たとえば

$$\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$$

[1] 小学校では帯分数を $2\frac{1}{3}$ のように書いていましたが，中学校で習った式を書くときの約束のひとつである「かけ算は記号 $\times$ を省略する」を考えるとこの式は $2\times\frac{1}{3}$ を意味することになり，帯分数元々の意味と異なってきます。そのため，中学校以降では $2\frac{1}{3}$ のような書き方は出てこなくなっていました。ここでは，そういった誤解を避けるために $2\frac{1}{3}$ を $2+\frac{1}{3}$ と表わしています。

ですが，右辺の 2 や分子の 1 はどうやれば出てくるでしょう？　それは，$7 \div 3$ を計算し，商と，余りを出したのでした。今商は 2，余りが 1 ですから，上のように変形ができます。

分数式の場合も同じです。たとえば $\dfrac{x+2}{x}$ は $(x+2) \div x$ を計算すると，商は 1，余りは 2 です。よって

$$\frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

残りの三つも同様に変形し，計算を進めていけばよい。

後の部分については解答例をよく観察し，どのような計算の工夫をしているか読み取ってください。

解答例

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \left(1+\frac{2}{x}\right) - \left(1+\frac{2}{x+1}\right) - \left(1+\frac{2}{x-3}\right) + \left(1+\frac{2}{x-4}\right) \\
&= \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-3} + \frac{2}{x-4} \\
&= \frac{2}{x(x+1)} - \frac{2}{(x-3)(x-4)} \\
&= -\frac{8(2x-3)}{x(x+1)(x-3)(x-4)} \cdots \textbf{(答)}
\end{aligned}$$

(解答例終)

練習 183

$$\frac{3x-14}{x-5} - \frac{5x-11}{x-2} + \frac{x-4}{x-3} + \frac{x-5}{x-4}$$

を計算せよ。

17.3.2　乗・除

分数式の乗除は次のようにやります。A, B, C, D を整式とするとき，

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C}{B \times D}, \quad \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}$$

割り算は，分数のときと同じように，割る式の分母と分子を入れ替えてかけ算をすればいいわけです。

例　$\dfrac{x^2-1}{x^2-4x-5} \times \dfrac{x^2-25}{2x^2+x-3}$ を計算せよ。

解説　分子は分子どうし，分母は分母どうしかけ算をすればよいのですが，こういった問題ではたいてい約分ができるので，計算を進める前にそれぞれの分母・分子を因数分解し，約分できるものは約分しておく方が計算は楽です。

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{(x+1)(x-1)\times(x+5)(x-5)}{(x-5)(x+1)\times(2x+3)(x-1)} \\ &= \frac{x+5}{2x+3}\end{aligned}$$

(例終)

例題 65 次の式を簡単にせよ。

$$\frac{6x^2-7x-20}{x^2-4} \div \frac{6x-15}{x^2-x-2} \div \frac{3x^2+7x+4}{x^2+2x}$$

解説　割り算は，分母と分子を入れ替えてかければいいのですが，こういった問題ではまずそれぞれの分母分子を因数分解しておきます。そして約分できるものは，どんどん約分していくと，結構計算が簡単になるものです。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{(2x-5)(3x+4)}{(x+2)(x-2)} \div \frac{3(2x-5)}{(x+1)(x-2)} \div \frac{(3x+4)(x+1)}{x(x+2)} \\ &= \frac{(2x-5)(3x+4)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+1)(x-2)}{3(2x-5)} \times \frac{x(x+2)}{(3x+4)(x+1)} \\ &= \frac{x}{3} \cdots \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(解答例終)

練習 184 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{3a^2y}{8bcx} \times \dfrac{4b^2c^2x^2}{15ay} \div \dfrac{9xy}{10a^3bc^2}$

(2) $\dfrac{x^3-27}{(x-3)^2} \div \dfrac{x^2+3x+9}{x^2+3x} \times \dfrac{x^2-9}{(x+3)^3}$

(3) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2} \div \dfrac{a^2+ab-2b^2}{a^2-ab-2b^2} \times \dfrac{3a^2+5ab-2b^2}{2a^2-5ab+2b^2}$

17.4　繁分数式

分数式についての計算は以上が基礎です。かなり複雑なものもありましたがどうだったでしょう。ここではさらに今少し複雑なものを扱い，皆さんに計算ができるようになってもらおうと思います。

例題 66 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}}$　　　(2) $\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{x+y}{x-y}}$

解説　この例題のような分数式を **繁(はん)分数式** といいます。　**繁分数式**

名前はともかく，式を見ただけでうんざりするかもしれません。どの式が分母，分子か，すぐにわかりますか?　確かに一見複雑ではあります。こういったときは根気よく，一つずつほぐしていくしか方法はありません。

そのほぐしていく方法ですが，二つあります。

一つは

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C},\quad \frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$$

を使う方法，今一つは分数を割り算と見る，つまり，

$$\frac{A}{B}=A\div B$$

と見る方法です。

それぞれの方法を説明しましょう。

(1) はじめの方法を使うなら，分母分子に含まれる分数式の分母を消すことができる式を，分母分子にかける（ややこしい言い方ですねぇ）。

今の場合は a をかければよい。

$$\frac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}}=\frac{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\times a}{\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\times a}$$

とするのです。すると右辺は $\dfrac{a^2-1}{a-1}$ となるので，前節でやった形になります。

もう一つの方法でやるとすると，

$$\frac{A}{B}=A\div B$$

ですから,

$$\frac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}}=\left(a-\frac{1}{a}\right)\div\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

よって右辺のそれぞれを通分し,割り算をかけ算になおせば

$$\frac{a^2-1}{a}\times\frac{a}{a-1}$$

となるので,前節でやった形となります。

(2) こちらは第一の方法でやろうとすると大変面倒になります。第二の方法で割り算と考えて計算する方が楽なんです(第一の方法でやるとなぜ面倒なのか?計算を試み,面倒くささを実感してください)。

解答例　(1) 第一の方法

$$\begin{aligned}\frac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}} &= \frac{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\times a}{\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\times a}\\ &= \frac{a^2-1}{a-1}\\ &= \frac{(a+1)(a-1)}{a-1}\\ &= a+1\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

第二の方法

$$\begin{aligned}\frac{a-\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{1}{a}} &= \left(a-\frac{1}{a}\right)\div\left(1-\frac{1}{a}\right)\\ &= \frac{a^2-1}{a}\times\frac{a}{a-1}\\ &= \frac{(a+1)(a-1)}{a-1}\\ &= a+1\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{x}{y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\\ &= \frac{x^2+y^2}{x(x+y)}\div\frac{x^2+y^2}{y(x-y)}\\ &= \frac{y(x-y)}{x(x+y)}\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(解答例終)

練習 185 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}}$ (2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}}$

(**(2) のヒント**: まず分母の $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}$ を簡単にせよ[2]。)

17.5 さらに勉強するために

整数と整式，分数と分数式。

この二組の類似を見てどう感じますか。

面白さを感じてもらえれば，これらを強調した甲斐があるというものです。

整式については，整数の素数に関係する話が残っています。これについては，後の章で複素数，2 次方程式の理論とともに説明します。もちろん複雑さは違いますが，さらに似ていることがわかってくると思います。

[2] このような形の分数を **連分数** といいます。これについては面白い話があるので，機会があったら触れることにしましょう。