第18章　式の証明

18.0　はじめに

図形の証明のやり方については，中学校のときに大分練習してきました。しかしながら多くの中学生が，図形の所で数学が嫌いになるというのが現状のようです。その理由は，どのように証明をしたらよいのか分からない，なぜ証明などというものをしなければならないのか分からない，というものが大半のようです。

図形の証明はできるようになると，ちょっとしたクイズめいていて面白いものが多い。私も中学校時代にこの面白さのとりこになり，数学の勉強をするようになったものです。

しかし図形の証明というものにはちょっとしたコツがあり，それをつかむこと，そしてさまざまな定理から，別の定理が導かれたりするので，いろいろなことを記憶していないとできません。このような論理の鎖が，幾何学の面白さにもなるのですが，慣れないものにとっては複雑さだけが先に立って，とっつきにくいものらしい。

証明というものは何も図形だけに限ったものではありません。これからはむしろ，図形の性質にしても式を用いた証明の方が多くなってきます。

本章ではこういったことを見通し，等式や不等式の証明方法について解説します。その方法は図形の場合と異なり，かなり単純であると思います。それゆえ，中学時代の図形の証明についての印象はひとまず脇において，白紙の状態で取り組んでみてください。

いずれも単純な場合から，比較的複雑なものまで具体的な例をもとにしています。

是非必ず自ら計算をし，そして１行１行どのような理由によって変形されているのか確かめながら読んでいくことをお勧めします。

補講 18 では，一般の場合のコーシー・シュヴァルツの不等式の証明を与えました。ベクトルの考え方と 2 次不等式に関する一つの事実を仮定しますが，内容的に面白く，すっきりしたものなので紹介しています。

18.1　等式の証明

本章では，さまざまな等式の証明の方法を解説しましょう。まずは恒等式の定義と証明のやり方から。

18.1.1　恒等式

定義 (恒等式)　いくつかの文字を含む等式 $A = B$ で，その文字にどんな値を代入しても等号が成立するようなものを **恒等式** という。　**(定義終)**　**恒等式**

注意　恒等式でない等式，つまり特定の値についてのみ成立する等式を **方程式** といいました。　**(注意終)**　**方程式**

18.1.2　恒等式であることの証明法

与えられた等式が方程式であることを示すには，代入して等号が成立しないような値を見つければよい[1]。

一方恒等式は「どんな値を代入しても成り立つ」ような等式です。

しかし代入すべき数は無数にあるので，それらすべてを代入して確かめることはできません。つまり与えられた等式が恒等式であることを，実際に数を代入して確かめることはできないのです。

そこで次のようにして証明することになります。

第 4 章「実数の性質」において次のように定義しました。

定義 (<，>)　$a - b > 0,\ a - b = 0,\ a - b < 0$ に応じて，$a > b,\ a = b,\ a < b$ と定める。　**(定義終)**

つまり $a = b$ であることを証明するには，$a - b = 0$ を確かめればいいのです。

そこで，与えられた等式が恒等式であることを証明するには，等式に含まれる文字に**数を代入したつもりになって**「(左辺)$-$(右辺)」を計算し，結果が 0 になることを示します[2]。

上のようにすれば，与えられた等式が恒等式であることの証明ができます。しかし次の節で紹介する具体的な例をみてもらえば分かるように，いちいち「(左辺)$-$(右辺)」を計算するのは面倒な場合も多い。そこで次のような別法を用いてもかまいません。

別法 1　左辺の式 A を次々変形していって，右辺の式 B を導く。

つまり $A = \cdots\cdots = B$ を示す。

---

[1] 恒等式の定義の中に「どんな値を代入しても」とあって，全称命題になっていることに注意してください。

[2] もちろん「(右辺)$-$(左辺)」を計算してもかまいません。

別法２　左辺の式 A を次々に変形していって，ある式 C を導き，次に右辺の式 B を次々に変形していって，同じ式 C を導く。
　つまり $A = \cdots\cdots = C,\ B = \cdots\cdots = C$ を示す。

　これらは等式の性質

$$A = B \text{ かつ } B = C \text{ ならば } A = C$$

を用いたものです。

18.1.3　具体例

　前節で紹介した等式の証明方法を，具体的な例で実行して見せましょう。よく観察してください。

例題 67 等式 $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ を証明せよ。

解説　これは別法１を使うと簡単に示せるタイプの等式です。実際，左辺を展開し，整理していけば自然に右辺に行きつきます。
　「証明」と聞くと中学時代の図形の証明を思いだして，構えてしまう人もいるかもしれません。またここまでで，大抵の定理には証明を与えてきたので，それらを見て萎縮（いしゅく）してしまっている人もいるかもしれません。
　しかしここで取り上げる等式の証明は――入試問題くらいのレベルになると結構複雑なものも出てきますが――比較的容易にできるものと思います。是非自分で筆を取り，取り組んでほしいと思います。

解答例
証明

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 2a^2 + 2b^2 \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

(証明終)

(解答例終)

練習 186 以下の等式を証明せよ。
(1) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
(2) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

(3) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(**ヒント：** いつでも左辺から出発するわけではありません。右辺から出発しても構わないのです。)

(4) 第 2 章「整式の基礎」で紹介した整式の展開公式全部

次は別法 2 を用いるようなタイプの等式です。

例題 68 等式 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ を証明せよ。

解説　左辺は左辺，右辺は右辺で展開していきます。後は，解答例をよく観察してください。

解答例

証明

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \\
(\text{右辺}) &= a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2 \\
&= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2
\end{aligned}$$

よって

$$(\text{左辺})=(\text{右辺})$$

(証明終)

(解答例終)

練習 187 次の等式を証明せよ。

(1) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(2) $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

これらは「(左辺) − (右辺)」を計算しても証明できます。上の例題をこの方法で証明すると次のようになります。

別証明

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)-\{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\} \\
&= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \\
&\quad -(a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ゆえに

$$(\text{左辺})=(\text{右辺})$$

(証明終)

注意　上の証明においてそれぞれの項を展開した部分が長くなったので，第二行目は後半を折り返して次の行に書いてあります。二行で一つの式なので注意。　**(注意終)**

練習 188 上の二つの練習を,「(左辺) − (右辺)」を計算計算することで証明せよ。

18.1.4　整式が恒等式となるための条件

等式

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \cdots (1)$$

を考えましょう。

これが x に関する恒等式だとすると，左辺，右辺のそれぞれの係数 $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c'$ についてどんなことが成り立つでしょうか。

(1) が x に関する恒等式ということは，文字 x にどんな値を代入しても成り立つ，ということです。

そこでたとえば，x に 0 を代入しましょう。すると左辺は

$$a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$$

右辺は

$$a' \times 0^2 + b' \times 0 + c' = c'$$

よって $c = c'$。

ゆえに元の等式は

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c$$

となり，つまり

$$ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$$

が x に関する恒等式。

これに $x = 1,\ x = -1$ をそれぞれ代入すると，

$x = 1$ のとき

$$a + b = a' + b' \cdots (2)$$

$x = -1$ のとき

$$a - b = a' - b' \cdots (3)$$

元の等式の係数である $a,\ b,\ a',\ b'$ は (2), (3) を満たしています。

(2) + (3) を作ると，$a = a'$，(2) − (3) を作ると，$b = b'$ を得ます。

以上の議論から次のことが分かりました。

$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x に関する恒等式ならば $a = a',\ b = b',\ c = c'$

先の章で触れたように，一つの命題が得られたとき，その逆を考えるのが数学の研究法。そこで上の結果の逆を考えてみましょう。
すると

$a = a',\ b = b',\ c = c'$ ならば $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x に関する恒等式

となりますが，これは明らかに成立します。
以上から次の定理が得られました，

定理 (整式が恒等式となるための条件 その１)
$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x に関する恒等式 $\iff$ $a = a',\ b = b',\ c = c'$

この定理の特別な場合として次の系が成り立ちます。

系 (整式が恒等式になるための条件 その２)
$ax^2 + bx + c = 0$ が x に関する恒等式 $\iff$ $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$

証明　右辺の０を $0 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$ と考えて定理「整式が恒等式になるための条件 その 1」を適用すればよい。 **(証明終)**

問 101 上の証明をより詳しく書き下せ。

注意　実は定理「整式が恒等式になるための条件 その 1」と 系「整式が恒等式になるための条件 その 2」 は同値です。
上の問いによって，定理「整式が恒等式になるための条件 その 1」$\Longrightarrow$ 系「整式が恒等式になるための条件 その 2」を証明したことになります。 **(注意終)**

問 102 系「整式が恒等式になるための条件 その 2」を仮定して，定理「整式が恒等式になるための条件 その 1」を導け。
(**ヒント：**定理「整式が恒等式になるための条件 その 1」は

$$(ax^2 + bx + c) - (a'x^2 + b'x + c') = 0 \iff a - a' = 0,\ b - b' = 0,\ c - c' = 0$$

と同値です。)

注意　ここでは左辺，右辺ともに２次式の場合の定理を紹介しましたが，実はもっと一般に

定理 (整式が恒等式となるための条件——一般版)
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a'_nx^n + a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a'_1x + a'_0$ が x に関する恒等式
$\iff$ $a_n = a'_n,\ a_{n-1} = a'_{n-1},\ \cdots,\ a_1 = a'_1,\ a_0 = a'_0$

が成り立ちます。

証明は与えませんが，$n=3$，つまり両辺が３次式である場合について自分のノートに書き下し，可能なら証明を与えてみるといいでしょう。 **(注意終)**

例題 69 $x^2+x+1=a(x-2)(x+2)+b(x+1)(x+2)+c(x+1)(x-2)$ が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ。

解説 この例題は２通りの解き方があります。一つは与えられた等式が恒等式であることを直接使う方法。今一つは上の定理を用いる方法です。

前者を **数値代入法**，後者を**係数比較の方法** ということがあります。

数値代入法

係数比較の方法

ここではこれら二つを紹介しましょう。

まずは前者，つまり数値代入法による解き方です。

これは，上の定理の証明方法をもう一度繰り返す方法です。

つまり適当な数値を代入することによって，求めるべき a, b, c に関する方程式を作り，それを解くわけです。そしてそれが十分条件にもなっていることを確かめます。こういうストーリーからなっています。

与えられた等式は恒等式なので，どんな値を代入しても等号が成立します。実はどんな値を代入して方程式を作っても a, b, c が得られるし，その値は一致します。

ということは，できるだけ方程式を解く手間が省けるような値を代入して計算を進めていきたいと考えるのが自然です。

しかし問題は，こういったことができるかどうか，です。この例題の場合 yes です。

もう一度与えられた等式をみましょう。

$$x^2+x+1=a(x-2)(x+2)+b(x+1)(x+2)+c(x+1)(x-2)$$

となっています。。右辺に大きな特徴があることに気がつくでしょう。そう，右辺を構成している式の因数は $x-2$, $x+2$, $x+1$ の三つで，それぞれの項は，これら三つのうちの二つからなっています。

ということは，これら三つの因数 $x-2$, $x+2$, $x+1$ を０にするような x を代入すれば，その因数を含む項は消えます。たとえば $x=-1$ とすれば，$x+1$ を因数に持つ２番目と３番目の項 $b(x+1)(x+2)$ と $c(x+1)(x-2)$ が消えます。これによって a が一発で求められます。

あと二つ，$x-2$, $x+2$ を 0 にするような x の値は何でしょう。下の解答例を見る前に自分で考えてください[3]。

[3]今の場合求めるべき数は a, b, c の三つでした。それゆえ代入すべき数も三つ必要となります。

さて，これで $a,\ b,\ c$ は求まりました。しかし今の場合これで終えてはいけません。

実際ここでやったことは

与えられた等式が恒等式ならば $a,\ b,\ c$ の値はこれこれである。

ということで，求まった $a,\ b,\ c$ の値を元の式に代入したとき，その等式が恒等式になるという保証はありません (逆は必ずしも真ならず！)。

そこで——定理「整式が恒等式になるための条件 その 1」 の証明でもやったように—— $a,\ b,\ c$ の値を元の式に代入した等式が恒等式であることを証明します。

これが以下の解答例の後半です。

答えの数値はあまりきれいなものになっていませんが，気にしないように。

解答例　与えられた等式が恒等式であるとする。このとき，この等式の文字にどんな値を代入しても等号が成り立つ。

そこで $x=-1,\ 2,\ -2$ をそれぞれ代入すると，

$x=-1$ を代入したとき

$$(-1)^2+(-1)+1=a\times(-3)\times 1$$

よって $a=-\dfrac{1}{3}$。

$x=2$ を代入したとき

$$2^2+2+1=b\times 3\times 4$$

よって $b=\dfrac{7}{12}$。

$x=-2$ を代入したとき

$$(-2)^2+(-2)+1=c\times(-1)\times(-4)$$

よって $c=\dfrac{3}{4}$。

次にこうして得られた $a,\ b,\ c$ を右辺に代入すると，

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= -\frac{1}{3}(x-2)(x+2)+\frac{7}{12}(x+1)(x+2)+\frac{3}{4}(x+1)(x-2)\\
&= \frac{1}{12}\{-4(x-2)(x+2)+7(x+1)(x+2)+9(x+1)(x-2)\}\\
&= \frac{1}{12}(-4x^2+16+7x^2+21x+14+9x^2-9x-18)\\
&= \frac{1}{12}(12x^2+12x+12)\\
&= x^2+x+1\\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}$$

ゆえに

$$x^2+x+1=-\frac{1}{3}(x-2)(x+2)+\frac{7}{12}(x+1)(x+2)+\frac{3}{4}(x+1)(x-2)$$

は恒等式。

ゆえに，

$$a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{7}{12},\ c=\frac{3}{4}\ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

補注　この問題は x に $-1,\ 2,\ -2$ 以外の値を代入しても解くことができます。たとえば $x=0,\ 1,\ 3$ などを代入して求めてみてください (もちろんこのようにやると $a,\ b,\ c$ に関する連立方程式が得られるので，それを解かなければならなくなります。またもちろんこの解答例と同じく，求められた値によって元の等式が恒等式になることを確かめなければいけません)。

実は——というよりもちろん——どんな値を代入しても同じ $a,\ b,\ c$ が得られることを保証するためには証明が必要となります。これは難しいので省略します[4]。この事実を信じて先に進みましょう。 **(補注終)**

練習 189 $-2x^2-2=a(x+1)(x-1)+b(x-1)(x-2)+c(x+1)(x-2)$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

次に「係数比較の方法」を用いて，同じ例題を解いてみましょう。

例題 70 $x^2+x+1=a(x-2)(x+2)+b(x+1)(x+2)+c(x+1)(x-2)$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

解説　係数比較の方法を使うには，左辺と右辺がいずれも展開して整理された形になっていなければいけません。この例題の場合，左辺はこれ以上簡単になりませんが，右辺は展開して整理する必要があります。実行すると，

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= a(x^2-4)+b(x^2+3x+2)+c(x^2-x-2)\\ &= (a+b+c)x^2+(3b-c)x+(-4a+2b-2c)\end{aligned}$$

よって元の等式は

$$x^2+x+1=(a+b+c)x^2+(3b-c)x+(-4a+2b-2c)$$

この状態で先の定理を適用すれば，この等式が恒等式であることとそれぞれの係数が等しいことと同値になります。つまり，この等式が恒等式であることと，

$$\begin{cases} a+b+c=1\\ 3b-c=1\\ -4a+2b-2c=-1\end{cases}$$

[4] とはいうものの，難しいことを覚悟した上で取り組むのは無駄にならないでしょう。

が成り立つことは同値です。
　よって後は，この連立方程式を解けばよい。

解答例　右辺を展開して整理すると

$$(\text{右辺}) = (a+b+c)x^2 + (3b-c)x + (-4a+2b-2c)$$

よって元の等式は

$$x^2 + x + 1 = (a+b+c)x^2 + (3b-c)x + (-4a+2b-2c)$$

辺々係数を比較して，

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 3b-c=1 \\ -4a+2b-2c=-1 \end{cases}$$

　これを解くと，

$$a = -\frac{1}{3},\ b = \frac{7}{12},\ c = \frac{3}{4} \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

補注　係数比較の方法では求まった値によって元の等式が恒等式になることは確かめなくてよい。なぜなら，先の定理によって等式が恒等式であることと，対応する係数が一致することは同値だからです。このあたりの相違について，よく観察しておいてください。

(補注終)

練習 190 $3x^2 - 8x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ が x についての恒等式となるように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

18.1.5　条件つきの等式

　数学では様々な等式が成り立ちますが，恒等式のように無条件で成り立つものはそんなに多くはありません。一方何らかの条件を付け加えることで成立する等式，これは結構たくさんあり，「条件つき等式」ということがあります[5]。
　証明方法を具体例で説明しましょう。基本的な所では先の恒等式の証明と同じです。異なるのは，与えられた条件をどのように使うのか，というところです。そこに注目して以下を読んでください。

例題 71 $a+b=1$ のとき，

$$a^2 - a = b^2 - b$$

を証明せよ。

[5] こうは書きましたが，「条件つき等式」という数学上の用語があるわけではないようです。

解説　この等式が恒等式ではないことはすぐに分かるでしょう (反例を挙げよ！)。しかしこの等式は付帯(ふたい)条件 $a+b=1$ が成り立つ，言い替えるとこの条件を成り立たせるような数の組 $a,\ b$ について成り立つ，これを証明せよ，というのです。

実際たとえば $a=\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{2}{3}$ として左辺と右辺をそれぞれ計算すると，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\\
&= \frac{1}{9}-\frac{3}{9}\\
&= -\frac{2}{9}\\
(\text{右辺}) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}\\
&= \frac{4}{9}-\frac{6}{9}\\
&= -\frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

となり，(左辺)=(右辺)。つまり等式が成り立っています ($a+b=1$ を成り立たせる別の $a,\ b$ についても等式が成り立つことを確かめてみてください)。

で，証明はどのようにするのかといえば，与えられた条件 (今の場合は $a+b=1$) をうまく使って，文字を一つ消去する，これがコツです。

この例題の場合，$a+b=1$ を b について解いて $b=1-a$ とし，右辺に代入して整理すると，左辺が得られます。先の節の「別法１」を用いるタイプです。

解答例　$a+b=1$ より，$b=1-a$。

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= (1-a)^2-(1-a)\\
&= 1-2a+a^2-1+a\\
&= a^2-a\\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

(証明終)

(解答例終)

練習 191　$a+b+c=0$ のとき $a^3+b^3+c^3=3abc$ であることを証明せよ。
(**ヒント：** $a+b+c=0$ をどれかについて解き，左辺は左辺，右辺は右辺に代入してそれぞれ計算せよ。)

18.1.6 部分分数分解

ここまでの話の応用して，分数式の形をした恒等式の扱い方を解説しましょう。まずはどのような場合に恒等式というのか，定義しておきます。

定義 (恒等式——分数式型) 分数式の分母を 0 にする x を除いたすべての x について

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

が成り立つとき，この等式を **恒等式** という。 **(定義終)**

注意 分母が 0 の分数を考える事ができない，という事実から上のような定義が与えられています。 **(注意終)**

分数式の形の恒等式の例を一つ挙げましょう。

例

$$\frac{x+7}{x^3+1} = \frac{2}{x+1} - \frac{2x-5}{x^2-x+1}$$

を証明しましょう。恒等式と同様な計算で行います。

今の場合は右辺から計算を始めるのがよく ($x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ であることに注意！),

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{2(x^2-x+1)-(2x-5)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{2x^2-2x+2-2x^2+3x+5}{x^3+1} \\ &= \frac{x+7}{x^3+1}\end{aligned}$$

となって，証明が完了します。 **(例終)**

もう一つ，条件つきの等式の例を挙げましょう (こちらの方がこれから後でよく出てきます)。

例 $ab=1$ のとき $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} = 1$ を証明しましょう。

条件の使い方は前と同じ。つまり条件を用いて一つの文字を消去します。

今の場合 $ab=1$ ですから，両辺を a で割って，$b = \dfrac{1}{a}$ (a で割ってよい理由を述べよ！)。

これを左辺に代入して計算を進めます (代入した段階で繁分数がでてきます。この計算の方法を忘れてしまった人は，第 2 章「分数式」を参照)。

解答例　条件より $a \neq 0$。両辺を a で割って，$b = \dfrac{1}{a}$。

さて，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{\frac{1}{a}+1} \\
&= \frac{1}{a+1} + \frac{a}{1+a} \\
&= \frac{1+a}{a+1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(解答例終)

(例終)

練習 192 $abc = 1$ のとき

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

を証明せよ。

この手の問題は入試でよく出題されてきました。代表的なものを，演習でいくつか取り上げることにしましょう。

ここでは，この節の表題に挙げた「部分分数分解」というほうに重点を置くことにします。これはすでに先の例に現れているのですが，もう少しやさしい例題を用いて説明しましょう。

例題 72

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$$

が恒等式となるように，定数 a, b の値を定めよ。

解説　同じような問題を，多項式の形でやっています。それが分数式になっても本質はあまり変わりません。

実際，この手の問題は左辺と右辺の分母が同じになるようにできています。それゆえ，それぞれを計算し，分母が同じ形になるように変形するのです (この問題の場合は左辺の分母はこれ以上変形できないので，右辺だけでよい)。

実行すると

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} &= \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{(a+b)x+(a-b)}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

これから与えられた等式は

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+(a-b)}{x^2-1}$$

となります。

二つの分数 $\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{m'}{n'}$ が等しいとは $mn' = m'n$ であるときでした。もし分母である n と n' が同じなら，これは $m = m'$ であることと同値です。

言い替えると,「分母の同じ分数は，分子も同じなら等しい」という当然至極(しごく)の結論が得られます。

この事実から結局

$$1 = (a+b)x + (a-b)$$

が得られ，これが恒等式である，というように元の問題を読み変えることができます。

ここまでくれば，後は既にやった問題となり，容易に解決します。

解答例　右辺を変形すると

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+(a-b)}{x^2-1}$$

これが恒等式なので

$$1 = (a+b)x + (a-b)$$

が恒等式。よって

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$$

これを解いて，

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

注意　この例題によって得られた等式

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)$$

は後で使います (後で使いやすいように，変形してあります。また，次の練習も後で使うことになります)。覚えている必要はありませんが，確実に変形できるようになっておいてください (使うときには再度実行して見せるつもりですが)。 **(注意終)**

練習 193 次の等式が恒等式となるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ。

$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$$

さて，この問題はこれで一段落です。そこでこの問題の一つの解釈を与えておきましょう。

もう一度先の例題の結果を見ますと，

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)$$

となっています。普通はこの式は左辺の形の式を右辺の形の式に変形した，と見ますが，逆に右辺だけを見て計算することを考えれば，通分し計算を進めるでしょう。実際にやってみてほしいのですが，その結果が左辺になることが分かります。

で，問題ではこの逆のプロセス，つまり先に左辺を与えて通分する前の形を求める，ということをやったことになります。

このような変形を **部分分数分解** といいます。ここまでの説明で理解できるように，部分分数分解するときにはもとの分数式の分母の因数が結果に現れます。 **部分分数分解**

問 103 $\dfrac{1}{(2x+1)(2x-1)}$ を部分分数分解せよ。
(**ヒント：**上のことからこの式を部分分数分解すると

$$\frac{1}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{2x-1}$$

のような形になるはずです。)

ここまでで出会ってきた我々の計算では，こういったことをやらなければならない必然性はありません。しかし上で触れたように，後 (「数列」や「積分」といったものがでてくるところ) でこの変形が必要となります。恒等式の具体例を与えることにかこつけて，その練習をしてもらったのでした。

18.2 不等式の証明

等式の証明方法については以上で一段落とし，不等式の証明方法について説明を進めることにしましょう。

18.2.1 不等式の性質

実数の大小関係については次のような定理が成立しました (第 4 章「実数の性質」参照)。

定理 (実数の性質３－大小関係)　a を実数とするとき，

$$a > 0, \quad a = 0, \quad a < 0$$

のいずれか一つが必ず成り立つ。

これを元に次のように定義をしました。

定義 (正，負)　$a > 0$ のとき a は **正**，$a < 0$ のとき a は **負** であるという。
(定義終)

そしてこのとき，計算と大小関係の間には次の定理が成り立つことにも触れました。

定理 (和・積と大小関係)　$a > 0,\ b > 0$ ならば $a + b > 0, \quad ab > 0$

このような定義したとき上の定理を使うことで，第 4 章「実数の性質」で紹介したような次の性質が成り立ちます。忘れてしまっている人がいるかもしれないので，再掲しましょう。

定理 (不等式の性質)
(1) $a > b,\ b > c$ ならば $a > c$
(2) $a > b$ ならば $a + c > b + c, \quad a - c > b - c$
(3) $a > b,\ c > 0$ ならば $ac > bc, \quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$
(4) $a > b,\ c < 0$ ならば $ac < bc, \quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$
(5) $a > b,\ c > d$ ならば $a + c > b + d$
(6) $a \geqq b$ かつ $a \leqq b$ ならば $a = b$

これらのうち最も基本的な性質は，(1) から (4) の４つです。

また $a > b$ または $a = b$ であるとき，$a \geqq b$，$a < b$ または $a = b$ であるとき，$a \leqq b$ と表わす，ことにしました。そして上の定理と同様のことが $\leqq$, $\geqq$ についても成り立ちました[6]。

18.2.2　不等式の証明法

等式の証明のときと同じく，よく使われる証明方法がいくつかあります。しかしその数は，等式の証明のときより多い。それらのいくつかを取り上げることにしましょう。

[6] これは厳密には間違いです。以下の証明などを参考にして，正確な形を自分で書き上げてほしい。

先の節で触れたように $a>b$ であることと，$a-b>0$ は同値なので，$a>b$ という形の不等式を証明するには $a-b>0$ をいえばよいことになります。これが基本です[7]。

具体的な例を挙げましょう。

例　$a>b>0$ ならば $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$ を証明しよう。

上のことから右辺から左辺を引き，正になることを証明すればよい。実際に引き算してみると，

$$\begin{aligned}(\text{右辺})-(\text{左辺}) &= \frac{1}{b}-\frac{1}{a}\\ &= \frac{a-b}{ab}\end{aligned}$$

$a>b$ より $a-b>0$。また $a>0,\ b>0$ より $ab>0$。よって $\dfrac{a-b}{ab}>0$。

以上で「(右辺)−(左辺)>0」が証明できたので，

$$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$$

がいえたことになる。　**(例終)**

練習 194　$a>b,\ c>d$ ならば $ac+bd>ad+bc$ を証明せよ。
(**ヒント：**「(左辺)−(右辺)」を作り，因数分解することを考えよ。)

不等式の証明のやり方の紹介を兼ねて，今後よく使われるいくつかの定理を例としてあげましょう。

すでに証明してありますが，

定理 (実数の平方)　a が実数のとき $a^2 \geqq 0$。
特に

$$a^2=0 \iff a=0$$

証明は第 4 章「実数の性質」を参照。

この定理を使って証明できる有名な不等式を紹介しましょう。

例　$a,\ b,\ x,\ y$ が実数であるとき，$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$ を証明しましょう。

[7] もちろん $b-a<0$ を証明してもよいのですが，ここは素直にいくことにしましょう。

基本に忠実に (左辺) − (右辺) を計算していきます。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2 \\ &= (a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2) - (a^2x^2+2abxy+b^2y^2) \\ &= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \\ &= (ay-bx)^2\end{aligned}$$

$a,\ b,\ x,\ y$ は実数なので $ay-bx$ も実数。よって $(ay-bx)^2 \geqq 0$。つまり

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$$

(例終)

注意　この不等式を **コーシー・シュヴァルツの不等式** といいます[8]。この定理は，

コーシー・シュヴァルツの不等式

定理 (コーシー・シュヴァルツ)　$a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_n$ を実数とするとき

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geqq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

と一般化できます。

$n=3$ の場合は，上の例と同様の方法で証明できます。しかし一般の場合は，この例のようなやり方ではちょっと難しいので別の方法をとりますが，証明できます。これについては補講でやってみせましょう。 **(注意終)**

問 104 $n=3$ の場合のコーシー・シュヴァルツの不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

を証明せよ。

定理「実数の平方」から次の定理が得られます。

定理 (平方の和)　$a,\ b$ を実数とするとき

$$a^2+b^2 \geqq 0$$

また特に

$$a^2+b^2=0 \iff a=b=0$$

[8]コーシー，シュヴァルツ，いずれも数学者の名前である。

証明　$a,\ b$ はともに実数なので前定理より $a^2 \geqq 0,\ b^2 \geqq 0$。よって定理「和・積と大小関係」より，$a^2+b^2 \geqq 0$ [9]。

次に「$a^2+b^2=0 \iff a=b=0$」を証明しよう[10]。

まず $a^2+b^2=0 \implies a=b=0$。

$a^2+b^2=0$ とすると，

$$a^2=-b^2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

$a,\ b$ ともに実数なので $a^2 \geqq 0,\ b^2 \geqq 0$。よってこの式の左辺は0以上だし，右辺は0以下。よって $a^2 \geqq 0$ かつ $a^2 \leqq 0$。

定理「不等式の性質」(6) より，$a^2=0$。ゆえに定理「実数の平方」より $a=0$。(1) に代入して $b=0$ を得る。

逆に $a=b=0$ ならば $a^2+b^2=0^2+0^2=0$。　**(証明終)**

注意　これは

定理 (平方の和)　$a_1,\ \cdots,\ a_n$ を実数とするとき

$$a_1^2+\cdots+a_n^2 \geqq 0$$

特に

$$a_1^2+\cdots+a_n^2=0 \iff a_1=\cdots=a_n=0$$

という形に一般化できます。証明を考えてみてください。　**(注意終)**

例題 73 $x,\ y$ を実数とするとき，$x^2+xy+y^2 \geqq 0$ を証明せよ。

また等号が成り立つのはどんな場合か。

解説　上の定理を使って証明できるタイプの不等式の例です。

$x^2 \geqq 0,\ y^2 \geqq 0$ なので，一見 $xy \geqq 0$ を証明すればよいように思えるかもしれませんが，それではうまくいきません。ちょっと工夫が必要となります。

我々の目指す形は $a^2+b^2 \geqq 0$ というものです。つまりここで与えれられた x^2+xy+y^2 を a^2+b^2 という形に変形したいわけです。どうすればよいでしょう。

次の変形を追いかけてほしい。

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= x^2+xy+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2+y^2 \\ &= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \end{aligned}$$

[9] 厳密にいうと定理「和・積と大小関係」は 「$a>0,\ b>0$ のとき $a+b>0$」ですが，この定理を使うことで「$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき $a+b \geqq 0$ 」もいえます。確かめてください。

[10] $A \iff B$ を証明するには， $A \implies B$ と $B \implies A$ の両方を証明する必要があったことを思い出してください。

$x,\ y$ ともに実数なので $x+\dfrac{y}{2}$ も実数。よって $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2 \geqq 0,\ \dfrac{3}{4}y^2 \geqq 0$。ゆえに

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geqq 0$$

となります[11]。

次に先の定理の「特に」という部分から

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 = 0$$

となるための必要十分条件は $x+\dfrac{y}{2}=0,\ \dfrac{3}{4}y^2=0$。これを解いて $x=y=0$ を得ます。

つまり等号が成り立つのは $x=y=0$ の場合です。

解答例としてまとめましょう。

解答例

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= x^2+xy+\left(\frac{y}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2+y^2 \\ &= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \end{aligned}$$

$x,\ y$ ともに実数なので $x+\dfrac{y}{2}$ も実数。よって $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2 \geqq 0,\ \dfrac{3}{4}y^2 \geqq 0$。ゆえに

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geqq 0$$

また

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 = 0$$

となるための必要十分条件は $x+\dfrac{y}{2}=0,\ \dfrac{3}{4}y^2=0$。

これを解いて $x=y=0$。つまり $x=y=0$ の場合であるときに限り，等号が成り立つ。 **(解答例終)**

練習 195 $x,\ y$ を実数とするとき，$x^2-xy+y^2 \geqq 0$ を証明せよ。

---

[11] $\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2$ は厳密には a^2+b^2 の形をしていません。しかし $\dfrac{3}{4}y^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$ と変形できます。また，y^2 の係数である $\dfrac{3}{4}$ は正なので，議論には支障をきたさないと考えることもできます。

次の定理もよく使われます。

定理 (正の数の累乗の大小)　$a > 0,\ b > 0$ のとき

$$a > b \iff a^2 > b^2$$

証明　$\Longrightarrow$) [12]

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

で，仮定より $a > 0,\ b > 0$ なので $a + b > 0$，また $a > b$ なので $a - b > 0$。正のものどうしをかけても正。よって $(a+b)(a-b) > 0$。ゆえに $a^2 - b^2 > 0$。つまり $a^2 > b^2$。

$\Longleftarrow$) $a^2 > b^2$ より $a^2 - b^2 > 0$。左辺を因数分解すると $(a+b)(a-b) > 0$。

仮定より $a > 0,\ b > 0$ なので $a + b > 0$。よって $(a+b)(a-b) > 0$ の両辺を $a + b$ で割って $a - b > 0$。ゆえに $a > b$。　**(証明終)**

注意　この定理の仮定に「$a > 0,\ b > 0$」が入っていることに注意してください。この仮定がないと，定理は成り立ちません (反例を与えよ!)。　**(注意終)**

この定理を応用を示しましょう。まずは簡単なものから。

例　$\sqrt{a} > 0,\ \sqrt{b} > 0$ なので

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} \iff (\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2$$

つまり

$$a > b \iff \sqrt{a} > \sqrt{b}$$

が成り立つ[13]。　**(例終)**

例

$$|a + b| \leqq |a| + |b|$$

を証明しよう。

これは，第 4 章「実数の性質」で絶対値の性質について触れたときに証明せずにいたものであり，**三角不等式** と呼びました。　**三角不等式**

これを証明するために，絶対値の性質を思い出しておきましょう。

実数 a の絶対値 $|a|$ は次のように定義しました：

[12]「$a > b \implies a^2 > b^2$ を証明する」と書くのが面倒なので $\Longrightarrow$) としました。これからも同様の記号を用います。

[13] この事実は第 4 章「実数の性質」では図を用いて証明しましたが，このように式の性質を用いて証明することもできます。実は，こちらの方が厳密な証明になっています。

定義 (絶対値)　実数 a の絶対値 $|a|$ を次のように定義する。

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(定義終)

これより次の定理を得ます。

定理 (絶対値の性質)　a を実数とするとき

$$a \leqq |a|, \qquad |a|^2 = a^2, \qquad |a||b| = |ab|$$

以上のことを前提に，三角不等式を証明しましょう。

三角不等式の証明　まず $|a+b| \geqq 0,\ |a|+|b| \geqq 0$ なので，定理「正の数の累乗の大小」より両辺を 2 乗しても同値[14]。つまり三角不等式を証明するかわりに，両辺を 2 乗して得られる

$$|a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$$

を証明してもよい (先の定理はこのように，証明すべき問題をやりやすい形に変形するときに使われます)。

基本に忠実に (右辺) − (左辺) を計算していこう (どこで定理「絶対値の性質」を使っているか，確認しながら式を追いかけてください)。

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) - (\text{左辺}) &= (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|a||b| - ab) \\ &= 2(|ab| - ab) \end{aligned}$$

ここで $|ab| \geqq ab$ なので，最後の式 $2(|ab| - ab)$ は 0 以上。よって

$$|a+b|^2 \leqq (|a|+|b|)^2$$

が証明できたことになる。　**(例終)**

問 105

$$|a+b| \geqq ||a| - |b||$$

を証明せよ。

---

[14] 定理「正の数の累乗の大小」は $>$ で書かれていますが $\geqq$ でも同様に成り立ちます。確かめてください。

練習 196 $a > b \iff a^3 > b^3$ を証明せよ。

注意　実は $a > 0,\ b > 0$ のとき

$$a > b \iff a^n > b^n$$

が成り立ちます。$n = 4$ のときの証明を試みてください[15]。
さらにもし可能なら一般の場合の証明を試みてください。 **(注意終)**

もう一つ有名な不等式を紹介しましょう。

定理 (相加平均と相乗平均の関係)　$a,\ b$ がともに正の実数であるとき

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

特に等号は $a = b$ のときに成立する。

注意
(1) 「相加平均と相乗平均の関係」では a と b が両方とも正でなければなりません。
(2) $\dfrac{a+b}{2}$ は普通の意味で a と b の「平均」といいますが，特に $\sqrt{ab}$ と対比させるときには「相加（そうか）平均」とか「算術平均」といいます。 **相加平均**
これに対して $\sqrt{ab}$ も一種の平均であり,「相乗平均」あるいは「幾何平均」といいます。 **算術平均**
(注意終) **相乗平均**
幾何平均

証明　一方に根号が入っていて証明がやりにくい。しかし $a > 0,\ b > 0$ より $\dfrac{a+b}{2},\ \sqrt{ab}$ のいずれも正なので，両辺を 2 乗しても同値。つまり

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq ab$$

を証明すればよい。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \\
&= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} \\
&= \frac{(a-b)^2}{4} \qquad \cdots\cdots (1)
\end{aligned}$$

---

[15] $a^4 - b^4$ を因数分解してみてください。ただし機械的にやってはいけません。$n = 2,\ n = 3$ のときの因数分解とよく見比べて，証明がしやすいように分解することです。
それをよく観察すれば，一般の場合にどうなるかが予想でき，その証明方法も見当がつくでしょう。
また上の問いでは $a > 0,\ b > 0$ は仮定されていなかったのにもかかわらず，$n = 2,\ 4$ の場合にはこの条件は落とせません。なぜでしょう？　理由を考えてください。

分子は０以上，分母は正なので $\dfrac{(a-b)^2}{4}$ は０以上。よって

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq ab$$

つまり

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

また等号は (1) が０になるときに成り立つ。つまり $a=b$ のときである。

(証明終)

問 106 $a>0,\ b>0$ のとき $a=(\sqrt{a})^2,\ b=(\sqrt{b})^2$ であることに注意して，上の定理を (左辺) − (右辺) $\geqq 0$ を示すことで証明せよ。

例　$x>0$ のとき,

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2$$

を証明しましょう。

$x>0$ より $\dfrac{1}{x}>0$。よって相加平均と相乗平均の関係より

$$x+\frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$$

等号は

$$x=\frac{1}{x}$$

のとき成り立つ。両辺に x をかけて分母を払うと

$$x^2=1$$

これを解いて $x=\pm 1$。今 $x>0$ なので $x=1$ となる。 **(例終)**

注意

(1) 「相加平均と相乗平均の関係」はこの例のように $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ の形で使うことも多い。これは覚えておいてください。

(2) この不等式はあとで何回か使うので，等号が成立する条件を含めてできれば覚えておいてほしい。

(注意終)

練習 197 $a>0,\ b>0$ のとき

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 4$$

を証明せよ。

(**ヒント：**左辺を展開してから「相加平均と相乗平均の関係」を用いよ。

18.3　さらに勉強するために

本章までにもさまざまな定理を紹介し，その証明を与えてきました。

「はじめに」でも触れましたように，図形の場合の証明より，式の証明の方が単純に感じられたことと思います。実際，——不等式はそれほどでもありませんが——式の場合は基本的な証明方法がはっきりしているので，まずはとにかく計算してみることでなんとかなることも多いようです。もちろん，入試問題くらいのレベルになると，そんなに単純でもなく，さまざまな事実を積み重ねなければならない問題が多くなります。

しかし本章ではそこまで複雑なものは扱わず，基本に忠実であることに重点を置きました。これからもさまざまな定理の証明を与えていきますが，そこではここに紹介した方法がさまざまな形で用いられるでしょう。その意味では，本章で解説したことはこれから後の章で繰り返し現れ，理解を深めていくことができることと思います。

また，ここまででも多くの式の証明を与えてきていますので，本章で得た知識を元にもう一度復習してみることをお勧めします。それによって本章の理解もさることながら，ここまでの内容の理解も深まることでしょう。