第19章　2次方程式の理論

19.0　はじめに

すでに２次方程式の解の公式については説明しましたので，使いこなせるようになっていると思います。
それを前提として，本章では２次方程式の理論を解説します。
２次方程式の理論は１次方程式と比べると大分複雑です。これは１次関数に対する２次関数の理論と同様です。しかしそれだけ豊富な内容を含み，さらに次数の高い方程式の理論の雛型にもなります。
本章の内容を簡単に紹介しましょう。
ある程度理論を完全なものとするために，まず「複素数」の概念を導入します。
「複素数」は,「２乗すると -1 となる数」をもとにして作られます。このような数は実数ではありません。つまり我々の現実の世界には存在しないものです。それゆえ——はじめは数学者自身もそうでしたが——受け入れることがなかなか難しい人がいることでしょう。しかしそれに慣れ，使いこなせるようになると実に便利で，さまざまな理論の (数学に限らず) 見通しがよくなってきます。２次方程式の理論，ひいては方程式の理論自体がその第一例となるのです。
高校での数学では，ここ以外では後１回しか登場しませんが，今後自然科学，工学を勉強していく際になくてはならない概念であるので，よく親しんでおいてください。
複素数についての準備を終えた後に，２次方程式の解の公式を復習します。
ここで重要なことは，このような公式が発見されたこと，どんな２次方程式も——複素数の範囲内で——必ず解ける，ということです。
後の二つの節では「解の判別」と「解と係数の関係」について触れます。
「解の判別」については，実数の範囲に限ってすでに学習しています。複素数の範囲で考えたときに結果がどう変わるか，注意してください。「解と係数の関係」については，簡単に触れます。一つの応用として，どんな２次式も複素数の範囲内で因数分解できることを示します。これは，より次数の高い式が因数分解できるかどうか調べようという動機になります。
補講に「共役複素数の性質と絶対値」を解説しました。すぐに使うことはありませんが，扱い方になれておいてほしいと思います。

19.1 複素数

19.1.1 なぜ複素数を考えるのか

第4章「実数の性質」において小学校，中学校と我々は数の範囲を広げてきた，という話をしました。そこではまず加減乗除の四つの計算が自由自在にできるようにするために有理数まで数の範囲を広げ，次に $x^2 = 2$ のような方程式が解けるようにするために実数の範囲まで数の範囲を広げてきたということを説明しました。

しかし一方で，ここまで数の範囲を広げておいても，単純な形の2次方程式

$$x^2 + 1 = 0$$

は実数の解を持たないということにも触れました[1]。

このような現象に対してここで二つの対応の仕方が考えられます。一つは解を持たないのではどうしようもないので，これを受け入れ，これ以上深入りしないとするもの。もう一つは無ければ作ってみよう (そしてこのような性質を持つ数を「複素数」と呼ぶことにする)，というものです。

前者の立場は我々の目に見える世界を記述するのに実数があれば十分なので，これはこれで納得できます。

一方後の方の立場はちょっと強引だし，不自然に感じられるかもしれません。しかしうまくいけばこのような考え方から大きな発展が得られることもありえます。で今回の場合は大変うまくいきました。そのことを歴史とさまざまな分野への応用が示しており，現在では複素数の考え方を抜きにして数学，そして広く自然科学，工学は成り立たないほどになっています。

しかし第4章「実数の性質」でも触れたように，我々の目に見える世界には2乗して負となる数が無いので，はじめて出会う人にとって，こういったものを考えるのは大変抵抗があることでしょう。

実際数学の歴史をひもとくと，数学者自身もはじめのうちはおそるおそる複素数を扱っています。数学者にとっても不自然に感じられ，受け入れがたいものであったようなのです。しかしその有用さ，そこから得られる様々な結果による見通しのよさが知られてくるにつれて，徐々に大胆に用いるようになり，今では上でも触れたようになくてはならない考え方となっています。

以上は数学内部でのことですが，複素数を用いることで様々な自然現象が理解しやすくなることも明らかになってきました。

複素数を考えるのは，このような歴史的な背景と理論的な透明さにあるのです。

---

[1] $x^2 + 1 = 0$ は $x^2 = -1$ と変形でき，一方 a を実数とすると $a^2 \geqq 0$ となることからこの結論が導かれたことを思い出しておいてほしい。

19.1.2 複素数の定義の背景

まず複素数を定義する前に 虚数単位 というものを導入しましょう。

先に平方根を定義したとき「2 の平方根は有理数ではない」ことから新しい記号 $\sqrt{2}$ を導入したのと同じように,「2 乗したら -1 となる実数はない」ので新しい記号を導入します。

定理 (虚数単位，i)　2 乗すると -1 となる数を i で表し，これを **虚数単位** という。 **虚数単位**

注意　「虚数」，つまり 虚(うつ) ろな数という名前も，こういった数を考えるときの抵抗を増幅しているのかもしれませんね。英語でも imaginary number，つまり「想像上の」とか「実在しない」というので，英語でも同様のことばが使われています。ちなみに i は imaginary number の頭文字です。 **虚数**

数学者がこのような名前をつけたことから，やはり彼らにとっても——はじめのうちは——抵抗のあるものだったのであろうことが想像できます。

こういった歴史的な背景からこの用語はすでに定着しており，いまさら変えることもできません。ここではこの習慣に従うことにします。 **(注意終)**

i は「2 乗すると -1 となる数」なので

$$i^2 = -1$$

です。ということは，i は -1 の「平方根」になっています[2]。

実数の場合の「平方根」は正のものと負のものの二つがありました。これも後で説明しますが，複素数の世界では大小関係は考えられません。よって虚数単位 i は正であるとも負であるともいえません。

しかし i を含む数の計算が**実数と同じようにできることを仮定する**と，2 乗すると -1 となる数は i 以外に $-i$ もそうであることが分かります[3]。実際

$$(-i)^2 = \{(-1) \times i\}^2 = (-1)^2 \times i^2 = i^2 = -1$$

よって -1 の平方根は $\pm i$ であることがわかります[4]。

[2]第 3 章「平方根の計算」で確認してほしいのですが，実数 a の平方根を定義する際に $a \geqq 0$ という条件を課していました。複素数を導入すれば，この条件を取り払うことができ，実数 a が正でも負でも 0 でも平方根を考えることができるようになります。これについてはすぐ後で説明しましょう。

[3]ここからしばらくの間はこのこと，つまり「 i を含む数の計算が実数と同じようにできることを仮定」して説明を続けます。

[4]実はこれは勇み足です。

というのは確かに i も $-i$ も 2 乗すると -1 になりますが，そのような数がこの二つだけであるかどうかは明らかではありません。これは方程式 $x^2 + 1 = 0$ の解が $\pm i$ だけであるかどうかという，方程式を解くことと同じ問題です。

後で示しますが実は -1 の平方根はこの二つ以外にないことがわかります。そこでここではこれ以上この問題には踏み込まないことにします。

注意　このあたりの考え方はこのあとの説明を読むと矛盾しているように感じられ，ちょっと戸惑うかもしれません。しかしよく考えましょう。我々は今の段階では「複素数」がどのような数なのかまったく知りません。むしろどのような数であるはずなのか，を知りたいのです。

では複素数はどのような性質を持っているはずなのでしょう？

まず我々の目的は，方程式 $x^2+1=0$ が解を持つようにすることにありました。そこから上のように i を定義したのです。

そして次には少なくとも数の計算法則 (加法の交換法則や結合法則，乗法の交換法則や結合法則，さらには分配法則) が成り立っていてほしい。

こういった希望からまず「複素数」はどのような性質を持っているのかが検討され，今度は逆にそういったものを定義とし，実際にさまざまな性質を導いていくのです。もちろんいつでもうまくいくとは限りません (後で反例を挙げますが，複素数の世界では大小関係を考えることはできません)。

このような考え方が背景にあり，多くの本では実は結果のみ，あるいはそこから得られる結論だけが示されているのです。これははじめて学習する者にとってはつらい話の展開ですね。

しかし数学ではよくあることで，伝統的に数学はこういった形で教えられてきたし，特に昔は紙材が限られていたからこういったことまで書いておく余裕はありませんでした。しかし教室，あるいは家庭教師のように１対１で説明するときなどにはこういったことが話されてきたことでしょう。もちろん今でもそんなに紙に余裕があるわけではありませんが，本書では，普通の本にはうえのような事情から省略されてしまうようなことまで，(それが今の皆さんには難しいことであっても) 可能な限りつつみ隠さず皆さんに提供していこうという方針で書いています。その分文章は長くなるのですが，面倒臭がらずに読んでもらえれば理解はより深まることと思います。　**(注意終)**

さて我々の目的は方程式 $x^2+1=0$ が解を持つようにすることであったのですが，ここまでくると次のことも分かります。

a を正の数とするとき，方程式 $x^2+a=0$ の解は $x=\pm\sqrt{a}i$ である。

実際 $(\sqrt{a}i)^2=(\sqrt{a})^2i^2=a\times(-1)=-a$。よって $(\sqrt{a}i)^2+a=-a+a=0$ となり， $x=\sqrt{a}i$ は方程式 $x^2+a=0$ の解になっています。同様にして $x=-\sqrt{a}i$ も方程式 $x^2+a=0$ の解であることが示せます。

問 107 示せ。

ただちょっと注意してほしいのは，上の計算では指数法則を使っているということです (どこで使っている？)。再び注意しておきますが，ここでは i を含む数の計算で指数法則 (そのもとになっているのは乗法の交換法則ですが) が成り立つものとして話をしています。

以上のように「２乗すると -1 となる数」i を導入することでかなりうまくいくことが期待できます。こういったことを背景にして次のように定義しましょう。

a が正の実数のとき，a の平方根で「正のもの」を $\sqrt{a}$ と表しました。それにならって次のように定義します。

定義 ($\sqrt{-k}$ の定義)　k を正の実数とするとき

$$\sqrt{-k} = \sqrt{k}i$$

と定める。特に $\sqrt{-1} = i$ である。 **(定義終)**

注意　実数の場合と違って i を含む数の世界には大小関係が考えられません。これから上の定義は

$$\sqrt{-k} = -\sqrt{k}i$$

としても**理論的には**支障がありません。なぜ「理論的に支障がない」のかについては，数学的にかなり深い意味があるのですが，ここではそれに踏み込む余裕がないし，かなり高度な内容になります。この理由を知りたい人は大学へいって「複素関数論」と呼ばれる数学の分野を勉強してください。 **(注意終)**

以上で方程式 $x^2 + a = 0$ についてはほとんどかたがつきました。

しかし我々はまだ (実数の世界を広げて) どういった数を考えればよいのかイメージが掴(つか)めません。そこでもう少し調べましょう。

何度も注意することになりますが，i を含む数の世界では加減乗除が自由にでき，計算法則が成り立っていてほしいのです。すると実数 b と i の積 bi はこの世界の数になっているはずです[5]。そしてこういった形の数 bi と実数 a の和 $a + bi$ もこの世界の数になっているはずです。

そこで $a + bi$ (ただし $a,\ b$ は実数) という形の数全体を考えてみましょう。集合の記号で書くなら

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$$

です[6]。つまり「 (実数) + (実数)i 」という形のもの全体を考えます。

さてこの集合の要素に対して加減乗除を計算してみましょう。今我々はその計算で加法の交換法則などの計算法則が成り立っていると仮定します。すると $\mathbb{C}$ の要素である二つの数 $a + bi,\ c + di$ (ただし $a,\ b,\ c,\ d$ は実数) について加法は

$$(a + bi) + (c + di) = a + (bi + c) + di = a + (c + bi) + di = (a + c) + (b + d)i$$

つまり

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

[5] 先の $\sqrt{a}i$ はこの形をしていることに注意。

[6] なぜこのような形の数を考えるのかについては少し後で明らかとなります。

それから $\mathbb{C}$ という記号ははじめてでてきました。第 4 章「実数の性質」で，自然数 (natural numbers) 全体の集合を $\mathbb{N}$，実数 (real numbers) 全体の集合を $\mathbb{R}$ などと表したのと同様です。後の説明から明らかになるように $\mathbb{C}$ は complex numbers からとったものです。

となります。実数どうしを足した結果はやはり実数でしたから $a+c,\ b+d$ はいずれも実数であり，右辺の $(a+c)+(b+d)i$ もやはり「(実数) + (実数)i」という形をしています。つまり $(a+c)+(b+d)i$ もやはり $\mathbb{C}$ の要素になっています。

同様に引き算，かけ算，割り算を計算すると

$$\begin{aligned}(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\ \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

となります。

問 108 確かめよ。
(**ヒント：**かけ算は i を普通の文字として計算せよ。その際 $i^2=-1$ であったことに注意。

また割り算については，分母の有理化はどのようにやったか思い出せ。その途中で $(c+di)(c-di)=c^2+d^2$ であること (確かめよ！) を，うまく用いよ。)

この結果と，実数を加減乗除した結果はやはり実数になることを照らし合わせて考えると，これら三つの等式の右辺はすべて「(実数) + (実数)i」という形をしています。

つまり「(実数) + (実数)i」という形をしている数全体 (つまり $\mathbb{C}$ という集合) では，計算法則が成り立つという仮定の下で新しい形の数は出てきません。つまりこういった形の数全体は加減乗除について一つの閉じた世界を作っていることが分かります[7]。

さらに

$$a = a+0i$$

と考えることができるので，実数はこの集合 $\mathbb{C}$ の一部分になっていると考えられます。

以上の考察から $\mathbb{C}$ という数の集合は，実数を一部として含み，加減乗除も自由自在にできる世界となりそうだ，ということが想像できるでしょう。

そこで今度は虚数単位 i を上のように定義し，それを用いて表される数 $a+bi$ をはじめに考え，そして加減乗除を上のような方法によって考えると，様々な計算法則が成り立つことを以下の節で説明しましょう。

19.1.3 複素数の定義とその加減乗除

改めて虚数単位を定義しましょう。ついでにそれに関連した用語や記号も紹介しておきます。

[7] これが先に $a+bi$ という形の数だけを考えることにした理由です。

定義 (虚数単位 i，複素数，実部，虚部)　2 乗すると -1 となる数 i を考え，これを **虚数単位**という。 **虚数単位**

よって特に

$$i^2 = -1$$

である。

また

$$a + bi \qquad (\text{ただし } a,\ b \text{ は実数})$$

の形に表される数を **複素数**(ふくそすう) **(complex numbers)** という。 **複素数** **complex numbers**

複素数 $a+bi$ の a の部分をこの複素数の **実部**，b の部分をこの複素数の **虚部** という。 **実部** **虚部**

また $a \neq 0$ の複素数を **虚数** という。 **(定義終)** **虚数**

注意

(1) 複素数 $a+bi$ を一つの文字 z で表すことが多いが，この記号を使ったとき z の実部を表すのに

$$\mathrm{Re}\ z$$

虚部を表すのに

$$\mathrm{Im}\ z$$

を用いることがある。実部 (real part)，虚部 (imaginary part) から作られた記号です。本書では今後使うこともないと思いますが，紹介だけしておきます。

(2) 先の節でも触れたように実数 a は $a+0i$ と表すことができるので複素数です。その実部は a，虚部は 0 です。

(3) 以下特に断らない限り $a+bi$ と書いたら a と b は実数であるとする。

(注意終)

例　$z = 3 - 4i$ という複素数について，実部は 3，虚部は -4 である。

また $z = -2$ は実数であるが，複素数であるとも考えることができ，その実部は -2，虚部は 0 である。 **(例終)**

定義 (複素数の相等)　二つの複素数 $a+bi,\ c+di$ について $a=c,\ b=d$ であるとき，そのときに限り

$$a + bi = c + di$$

と表す。

特に $a+bi=0$ であるのは $a=b=0$ のときに限る，と定義する。 **(定義終)**

注意　ちなみに複素数の間の加減乗除が定義されていれば

$$a + bi = c + di \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = c,\ b = d$$

という命題と

$$a+bi=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a=0,\ b=0$$

という命題は同値です(「$a+bi,\ c+di$ について $a=c,\ b=d$ であるとき，そのときに限り $a+bi=c+di$ である」ということは記号で表すと「$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$」となる)。つまり相等の定義にはいずれか一方を採用すればよい，ということです。

これは第 3 章「式の証明」で，定理「整式が恒等式になるための条件 (その 1)」と系「整式が恒等式になるための条件 (その 2)」が同値だったことと同じ方法で証明できます。試みてください。 **(注意終)**

注意　この定義は何を意味するのかちょっと分かりにくいかもしれません。しかしよく考えましょう。我々ははじめて複素数というものを定義しました。それらが等しいとはどういう場合のことを指すのか，この時点では明らかではありません。実はその定義によって矛盾が生じなければ，どのように定義しても構わないのです (理論的には)。しかしそれではどうしようもありません。そこでどのように定義したら自然なのか調べてみましょう。その方法は先の節と同じです。

先の節と同じく，ひとまずは複素数の加減乗除ができるとしましょう。$a+bi=0$ とします。まず $b\neq 0$ とすると，加減乗除ができるのでこの等式を i について解くことができ，

$$i=-\frac{a}{b}$$

となります。左辺は実数ではありませんが，右辺は実数で矛盾。よって $b=0$。これから $a=0$ も得られます。逆に $a=b=0$ なら $a+bi=0$ は明らか。つまり複素数の加減乗除ができると仮定すると $a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$ がいえました。

以上の考察と先の同値から

$$a+bi=c+di \qquad \Longleftrightarrow \qquad a=c,\ b=d$$

と定義しました。

しかし今のところ複素数の加減乗除は定義されていません。そこで先に二つの複素数が等しい条件を定義したのでした。 **(注意終)**

定義 (複素数の加減乗除)　二つの複素数 $a+bi,\ c+di$ に対して

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i \\
(a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \\
&\quad (\text{ただし割算においては } c+di\neq 0 \text{ とする})
\end{aligned}$$

と定義する。 **(定義終)**

注意　実は上の定義のうち足し算とかけ算だけを定義すれば十分です。実際複素数 z に対して $-z=(-1)\times z$ と定義すれば，引き算は $z-z'=z+(-z')$ と定義でき，上のように計算すればよいことがわかります。

また後で触れるように，z, z'' を $z \neq 0$ を満たす二つの複素数とするとき，$zz' = z''$ となるような複素数 z' が必ずただ一つだけ見ちけられます。それを $\dfrac{z''}{z}$ と表すことにすれば，割り算を定義することができ，その計算方法は上のようになります。 **(注意終)**

問 109 このことを確かめよ。つまり，「$z = c + di$, $z'' = a + bi$ とするとき，$z' = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ となる」ことを示せ。

上のように加減乗除を定義するのですが，忘れてしまった場合には，次のように覚えておけばいいでしょう。すなわち加減乗については，$a + bi$ を i に関する文字式と考えて計算し，i^2 が出てきたら -1 に置き換えて計算を続ければよい。

割り算については分母の有理化と同じく，(分母が $c+di$ なら) 分母分子に $c-di$ をかけることで上の結果を得ます。

例 （１） $(3+4i)+(1-2i) = (3+1)+(4-2)i = 4+2i$

（２） $(3+4i)-(1-2i) = (3-1)+(4+2)i = 2+6i$

（３） $(3+4i)(1-2i) = 3-6i+4i-8i^2 = 3-2i-8\times(-1) = 11-2i$

（４） $\dfrac{3+4i}{1-2i} = \dfrac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\dfrac{17}{5} + \dfrac{16}{5}i$ **(例終)**

問 110 上の計算を自力で行え。

複素数 $a + bi$ に対して $a - bi$ には名前がついています。

定義 (共役な複素数) $a - bi$ を $a + bi$ に **共役**（きょうやく） **な複素数** という。 **共役な複素数**

複素数 z に共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。 **(定義終)**

例 $3 + 2i$ に共役な複素数は $3 - 2i$。

$4 - 3i$ に共役な複素数は $4 + 3i$。

2 に共役な複素数は 2 である。 **(例終)**

注意 上の三番目の例はちょっと意外かもしれません。しかし実数 a は $a + 0i$ と書けるのですから，これに共役な複素数は $a - 0i$。これは a です。 **(注意終)**

「共役」という用語を使うなら，割り算は「分母分子に，分母に共役な複素数をかけて計算すればよい」ということになります。

練習 198 次の計算をせよ。

(1) $(-i)^2$　　(2) $(\sqrt{3}i)^2$　　(3) i^3

(4) $-i^4$　　(5) $\dfrac{1}{i}$　　(6) $(-2-i)+(2-3i)$

(7) $(1+i)^2$　　(8) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$　　(9) $\dfrac{1+i}{1-i}$

このように加減乗除と共役な複素数を定義すると，これらについて以下のことが成り立ちます[8]。

定理 (複素数の加減乗除)　z_1，z_2，z_3 を複素数とするとき，次が成り立つ。

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$　(加法の交換法則)

(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$　(加法の結合法則)

(3) $z_1z_2=z_2z_1$　(乗法の交換法則)

(4) $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$　(乗法の結合法則)

(5) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$　(分配法則)

証明　(1) だけ証明し，残りは読者の演習問題とする。

$z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $z_3=a_3+b_3i$ とする。

(左辺)$=\{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)\}+(a_3+b_3i)=\{(a_1+a_2)+a_3\}+\{(b_1+b_2)+b_3\}i$

(右辺)$=(a_1+b_1i)+\{(a_2+b_2i)+(a_3+b_3i)\}=\{a_1+(a_2+a_3)\}+\{b_1+(b_2+b_3)\}i$

実数については，加法の結合法則が成り立つので $(a_1+a_2)+a_3=a_1+(a_2+a_3)$，$(b_1+b_2)+b_3=b_1+(b_2+b_3)$。

よって $\{(a_1+a_2)+a_3\}+\{(b_1+b_2)+b_3\}i=\{a_1+(a_2+a_3)\}+\{b_1+(b_2+b_3)\}i$。
つまり $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ が成り立つ。　**(証明終)**

問 111 上の定理の残りの部分を証明せよ。

以上をまとめると

複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ では加減乗除が自由にでき，計算法則が成り立つ。

19.1.4　負の数の平方根

この節では負の数の平方根，言い替えると方程式 $x^2=-a$(ただし a は正の数) の解について解説します。

第 4 章「実数の性質」において，**方程式解法の原理** と名付けた定理がありました。それは

[8] ここでは実数の計算法則は成り立つものと仮定します。実はここできちんと証明を与えたいがために，第 4 章「実数の性質」で実数の計算法則についてまとめたのでした。

定理 (方程式解法の原理)　$a,\ b$ を実数とする。このとき $ab=0$ ならば $a=0$ または $b=0$ [9]。

ここで重要なことは上の定理の仮定「$a,\ b$ を実数とする」を「$\alpha,\ \beta$ を複素数とする」としても成り立つということです。

定理 (方程式解法の原理)　$\alpha,\ \beta$ を複素数とする。このとき $\alpha\beta=0$ ならば $\alpha=0$ または $\beta=0$

第 4 章ではこの定理の実数版の証明はしませんでした。ここでは複素数版を証明しておきましょう。
準備として次の定理を証明します。

定理 (逆数の存在)　$z=a+bi$ が 0 でなければ，$zz'=1$ となる複素数 z' が必ず一つ存在する。
実は $z'=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

証明　複素数の相等より「$z=0 \iff a=0$ かつ $b=0$」。この命題の対偶をとると「$z\neq 0 \iff a\neq 0$ または $b\neq 0$」。
よって $a^2+b^2\neq 0$。これにより $\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$ は意味がある。
この z' について zz' を計算すると 1 になることが分かる。　**(証明終)**

問 112 実際に計算して $zz'=1$ を確かめよ。

さて，これを使うと「方程式解法の原理」が簡単に証明できます。
方程式解法の原理の証明　α に関する場合わけをして証明する。
α に関しては $\alpha=0$ あるいは $\alpha\neq 0$ のいずれかである。
(1) $\alpha=0$ の場合
これは結論の「$\alpha=0$ または $\beta=0$」のうちの一方であり,「p または q」の形の命題は命題は，p と q の一方が真の場合真であったから，今の場合結論が成立する。
(2) $\alpha\neq 0$ の場合
先の定理から $\alpha\alpha'=1$ となる複素数 α' が見つかる。
$\alpha\beta=0$ の両辺に α' をかけると

$$\alpha'\alpha\beta=\alpha'\times 0$$

[9] 第 4 章ではこれだけでなく,「あるいは同じことであるが $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ ならば $ab\neq 0$」とも書きました。しかしすでに我々は第 6 章「論理」において対偶命題の作り方を学びました。それによれば,「$ab=0$ ならば $a=0$ または $b=0$」の対偶が「$a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ ならば $ab\neq 0$」となることはすぐにわかるでしょう。
第 4 章「実数の性質」で「同じこと」と書いたのは「同値」であるという意味だったのでした。

となり $\alpha' \times 0 = 0$ なので[10]

$$1 \times \beta = 0$$

つまり

$$\beta = 0$$

(証明終)

さて本節のテーマである，方程式 $x^2 = -a$(ただし $a > 0$) についての解説には入りましょう[11]。

まずは $-a = (\sqrt{a}i)^2$ であることに注意しましょう[12]。すると与えられた方程式は $x^2 = (\sqrt{a}i)^2$ となり移項すると

$$x^2 - (\sqrt{a}i)^2 = 0$$

左辺は因数分解でき

$$(x + \sqrt{a}i)(x - \sqrt{a}i) = 0$$

左辺は複素数なので「方程式解法の原理」より

$$x + \sqrt{a}i = 0 \quad \text{または} \quad x - \sqrt{a}i = 0$$

よって

$$x = \sqrt{a}i \quad \text{または} \quad x = -\sqrt{a}i$$

１次方程式のときと同じように，このプロセスは「方程式 $x^2 = -a$ が解を持てばそれは $x = \pm\sqrt{a}i$ しかない」ことを示しています。

先の脚注と合わせると結局負の数 $-a$ の平方根は $x = \pm\sqrt{a}i$ であること，これしかないことが結論されます[13]。

実数の場合には $\sqrt{a}$ を「a の平方根のうち正のもの」と定義しましたが，次の節で説明するように，複素数の世界では大小を考えることができません。それゆえ $\sqrt{-a}$ を

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

と定めるべきか

$$\sqrt{-a} = -\sqrt{a}i$$

[10]第 4 章で $a \times 0 = 0$ を証明しました。あそこではまだ複素数を知らなかったので，a は実数です。しかしこれは a が複素数の場合でも成立します。第 4 章を読み直して，a が複素数でも $a \times 0 = 0$ の成り立つことを証明してください。

[11]$a > 0$ なので $-a < 0$ であることに注意してください。第 4 章で解説したことから，この方程式を満たす実数 x は存在しません。

しかし複素数の世界ではこの方程式が完全に解けることを，ここでは説明しようとしているのです。

[12]$a > 0$ なので $\sqrt{a}$ は意味があります。

またこのことは $\sqrt{a}i$ が方程式 $x^2 = -a$ の解であること，再び言い替えるなら $\sqrt{a}i$ が $-a$ の平方根の一つであるを示しています。同様に $-\sqrt{a}i$ も $-a$ の平方根であることもわかります (確かめよ)。

[13]同様の議論によって，正の数 a の平方根が $\pm\sqrt{a}$ しかないことも結論できます。その証明をノートに書き下してください。

と定めるべきか定かではありません。いや実は，どちらで定義しても理論的に支障のないことが，数学の深い理論によって知られています。

そこで次のように定義します。

定義 (負の数の平方根)　$a>0$ のとき $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ と定める。　**(定義終)**

このように定めると

$$x^2=-a\ (a>0)\ \text{の解は}\pm\sqrt{a}$$

であると結論できます。

そしてさらに次のことが結論できます。

定理 ($x^2=a$ の解)　a を実数とするとき，方程式 $x^2=a$ は解けて，その解は $x=\pm\sqrt{a}$。

これを平方根の言葉を使って言い直せば

定理 (実数の平方根)　実数 a の平方根は $\pm\sqrt{a}$。

注意　上の定理の仮定が「a を実数とするとき」，あるいは「実数 a の」であって,「a を複素数とすると」とか「複素数 a の」ではないことにちょっと気をつけておいてほしい。これについては，次の章で解説する。

興味のある人はそこまでに自分で考えておいてほしい[14]。　**(注意終)**

例

$\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$

$\sqrt{-8}=\sqrt{8}i=2\sqrt{2}i$　**(例終)**

練習 199 次の数を虚数単位 i を用いて表せ。

(1) $\sqrt{-4}$　(2) $\sqrt{-12}$

(3) $\sqrt{-\dfrac{1}{16}}$　(4) $\sqrt{-\dfrac{25}{2}}$

---

[14]つまり

（1） α を複素数とするとき $x^2=\alpha$ となる複素数は存在するか。

（2） 存在するとするとそれはどのような形をしているのか。

（3） 存在しないとしたら，さらに数の範囲を広げなければならないが，どのような形の数を考えればよいのか。

便宜上番号を振りましたが，本章の最初の節での議論を参考にすると，(2) から取り掛かる方が調べやすいでしょう。

注意　根号の中が負の数になる式の計算について，一つ注意を与えておきましょう。一般的な形での整理は皆さんにお任せすることにし，具体的な例で説明しておきます。
　第 3 章「平方根の計算」において

定理 (平方根のかけ算と割り算)

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

という定理を紹介しました。このときには，負の数の平方根については知らなかったので，条件を明示していませんが，$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ でした。
　負の数の平方根についても考えるようになった今，この条件を変えることができるのかどうか，検討すべきときです。すると，$a < 0,\ b < 0$ のときには成り立たないことが次の例によって分かります。

$$\begin{aligned} \sqrt{(-2)(-3)} &= \sqrt{6} \\ \sqrt{-2}\sqrt{-3} &= \sqrt{2}i\sqrt{3}i=-\sqrt{6} \\ \text{つまり}\quad \sqrt{(-2)(-3)} &\neq \sqrt{-2}\sqrt{-3} \end{aligned}$$

問 113　その他の場合，つまり $a \geqq 0,\ b < 0$ の場合などは成り立つだろうか？
　成り立つなら証明を，成り立たないなら上のような反例を与えよ。

(注意終)

　話をもとに戻しましょう。
　これで $x^2=$ (負の数) の形の 2 次方程式がいつでも解けるようになりました[15]。例を挙げましょう。

例　方程式 $4x^2=-9$ を解く。
　両辺を 4 で割ると

$$x^2=-\frac{9}{4}$$

よって

$$x=\pm\frac{3}{2}i$$

(例終)

例題 74　方程式 $(x-2)^2=-2$ を解け。

[15]実はどんな 2 次方程式も解けるようになったのです。

解説　２次方程式についての解説は，この後の節で行いますが，ここまでの知識で解け，後の準備となるような例題を一つ紹介しておきましょう。

与えられた方程式は $x-2$ を一つのもの——例えば X——と考えれば $X^2=-2$ となります。これは直前の例と同じ形をしているのですぐに解けます。このような方法には大分なれていることと思うので，解答例では $x-2$ のままで解いて見せましょう (このほうがよっぽど早く解けるので)。

解答例　与えられた方程式より

$$x-2=\pm\sqrt{2}i$$

２を移項すると

$$x=2\pm\sqrt{2}i \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 200 次の方程式を解け。

(1) $x^2=-16$　(2) $9x^2=-25$　(3) $x^2+3=0$
(4) $(x+1)^2+4=0$　(5) $3(x-2)^2+16=0$

19.1.5　複素数の大小関係

この節は飛ばしても以下の理解に支障ありません。急ぐ人は先に進んでも構いません。

すでに「複素数の世界では大小を考えることができない」と何回か書いてきました。この節ではそれを説明しましょう。

第 4 章で触れたように，実数の世界ではどんな数も正か，０か，負のいずれかでした。

定理 (実数の性質３ー大小関係)　a を実数とするとき，

$$a>0,\quad a=0,\quad a<0$$

のいずれか一つが必ず成り立つ。

これを元にして二つの数の間の大小関係を

定義 (<，>)　$a-b>0,\ a-b=0,\ a-b<0$ に応じて，$a>b,\ a=b,\ a<b$

(定義終)

と定めたのでした。

するとこのとき **不等式の性質** と呼んだ次のような定理が成り立ちました。

定理 (不等式の性質)

(1) $a > b,\ b > c$ ならば $a > c$
(2) $a > b$ ならば $a + c > b + c, \quad a - c > b - c$
(3) $a > b,\ c > 0$ ならば $ac > bc, \quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$
(4) $a > b,\ c < 0$ ならば $ac < bc, \quad \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$
(5) $a > b,\ c > d$ ならば $a + c > b + d$
(6) $a \geqq b$ かつ $a \leqq b$ ならば $a = b$

で，このような性質を満たす大小関係が複素数の世界でも成立するのかどうかが一つの問題となりますが，以下に説明するようにこれは駄目なのです[16]。

実際，虚数単位 i は正か，０か，負のいずれかですが，まず０ではありません。正だとして，ひとまず上の不等式の性質が成り立つとすると，正の数どうしの積は正でしたから $i^2 > 0$。しかしこれは $-1 > 0$ ということで，矛盾。

問 114 $i < 0$ としても矛盾が生じることを確かめよ。

以上のことから，複素数の世界では不等式の性質を満たすような大小関係を考えることはできないことがわかります。

19.2 2次方程式

以上で理論的な準備ができたので，いよいよ本章のメインテーマである２次方程式について復習しましょう。

19.2.1 2次方程式

まず２次方程式を定義を思い出しておきます。

定義 (２次方程式)

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{ただし } a,\ b,\ c \text{ は定数で } a \neq 0\ )$$

の形の方程式を **２次方程式** という。 **(定義終)** **２次方程式**

注意 上では単に「$a,\ b,\ c$ は定数」としましたが，後の議論の関係から今のところは実数であると考えてください。２次方程式の理論を完全なものとするには「$a,\ b,\ c$ は複

[16]大小関係が定められても，不等式の性質が成り立たなければあまり役に立ちません。

素数」として議論したいのですが，先の節で触れたように複素数の平方根については何もいっていないのでできません。

また以下の議論は複素数の平方根についての理論ができあがれば，そのまま適用できます。そのあたりにも意を払いながら読んでください。 **(注意終)**

19.2.2 解の公式

さて，２次方程式が解けるかどうかが次の問題となりますが，これについては次の結果が成り立ちます。

定理（２次方程式の解の公式） 係数が実数の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は解けて，その解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

注意 先の結果では,「b^2-4ac が０以上のとき」というただし書きがありましたが，ここではそれがなくなっていることに注意してください。 **(注意終)**

復習を兼ねて，解の公式を証明しておきましょう。

解の公式の証明

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

より $ax^2+bx+c=0$ は

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

となる。定数項を移項して a で割ると

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

右辺は正であっても，負であっても

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

であるから

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\dfrac{b}{2a}$ を移項して整理すると

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

実数 $b^2 - 4ac$ の平方根が $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ しかないことから，２次方程式の解が上のものしかないことも分かる。 (証明終)

例　$2x^2 + x + 1 = 0$ を解いてみよう。
解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 3} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{6} \end{aligned}$$

$\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$ だったので

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{6}$$

(例終)

練習 201 解の公式を用いて以下の方程式を解け。

(1) $x^2 + x + 1 = 0$　　(2) $2x^2 + x - 1 = 0$
(3) $9x^2 - 6x + 1 = 0$　　(4) $x^2 + 2x + 2 = 0$
(5) $3x^2 + 6x + 1 = 0$　　(6) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

19.3　解の判別

さて以上で解を求めるという定量的な話は一段落とし，解の公式からわかる定性的なことに話題を転じましょう。

19.3.1　判別式

いろいろな２次方程式を解いてみるとすぐに気がつくように，その解は実数だったり，虚数だったりします。
これは実際に与えられた方程式を解かなくても，係数からある計算をすれば判定できます。

実際，虚数か否かは解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

の分子にある $\sqrt{b^2 - 4ac}$ の中味である $b^2 - 4ac$ できまり，これが正または０の場合は実数，負の場合は虚数となります。

さらに細かくいうと正の場合は実数の解が二つ，０の場合は実数の解が一つ，負の場合は虚数の解が二つとなります。

このように２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の状況は，$b^2 - 4ac$ という値の正，０，負によって知ることができるわけです。このような事情からこの量には名前がついていました。

定義 (判別式)　２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に対して

$$D = b^2 - 4ac$$

を，この方程式の **判別式** という。 **(定義終)** **判別式**

この用語を用いて上のことを言い直せば次のようになります。

定理 (２次方程式の解の判別)　２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると

（１）$D > 0 \iff$ 異なる二つの実数解
（２）$D = 0 \iff$ 一つの実数解
（３）$D < 0 \iff$ 異なる二つの虚数解

定義 (重解)　上の定理における (２) の場合を **重解**（じゅうかい） という。 **(定義終)** **重解**

注意　解が一つの場合をなぜ「重」解というのでしょう。

２次関数との関連を知れば理解できますが，二つの解が **たまたま** 重なったもの，と考えると様々な面で扱いやすいことからきています。これは２次方程式だけに限りません。これについて詳しいことは後の節を参照してください。 **(注意終)**

上の注意より次のように言うことができます。

系 (２次方程式の解の個数)　実数を係数とする２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は (重複をこめて) ２個である。

注意　「２次方程式の解の個数は２個」

これは非常に覚えやすいでしょう。実数の世界だけのときは，判別式の状況によって解の個数が変わったのにも関わらず，複素数まで世界を広げるとことが単純に表現できるようになったわけです。

しかしこの定理は上のように定義したことから言えるわけで，単なる言葉の遊びのように感じられるかもしれません。しかしこれは 2 次方程式以外でも成り立ちます。これについては，次の章で説明しましょう。 **(注意終)**

例 2 次方程式 $2x^2+3x+1=0$ の解を判別してみよう。

判別式を D とすると

$$D=3^2-4\times 2\times 1=9-8=1$$

よって $D>0$ であるから，解は異なる二つの実数解である。

また 2 次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の解は，判別式を D' とすると

$$D'=2^2-4\times 2\times 1=4-8=-4$$

よって $D'<0$。ゆえに解は異なる二つの虚数解である。

最後に 2 次方程式 $4x^2+4x+1=0$ は，判別式を D'' とすると

$$D''=4^2-4\times 4\times 1=16-16=0$$

ゆえに重解である。 **(例終)**

注意 x の係数が偶数の場合には解の公式として

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

を使うことができました。それゆえ上の判別式の代わりに $D/4=b'^2-ac$ を使っても構いません。

よって上の例で言えば 2 次方程式 $2x^2-2x+1=0$ の解は，判別式を D' とすると

$$D'/4=(-1)^2-2\times 1=1-2=-1$$

となり，$D'<0$ であることがわかる。 **(注意終)**

練習 202 次の方程式の解を判別せよ。

(1) $3x^2+9x-2=0$ (2) $4x^2+20x+25=0$

(3) $2x^2+3x+3=0$

19.3.2　解と係数の関係

実数を係数とする x についての２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を考えましょう。この方程式の解は (重解の場合はたまたま重なったと考えると) 常に二つあり，それらは係数 $a,\ b,\ c$ によって定まります。二つの解を $\alpha,\ \beta$ とします。

解の公式を使うと

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

問 115 上の式を確かめよ。

また

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

となることも確かめよ。

このように２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解 $\alpha,\ \beta$ とその係数 $a,\ b,\ c$ の間には簡潔な関係があります。

定理としてまとめましょう。

定理 (解と係数の関係)

解と係数の関係

２次方程式の二つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

注意　この二つの関係式

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

を元の２次方程式の **解と係数の関係** といいます。

和の方の右辺にはマイナスの記号がついていることに注意してください。　**(注意終)**

例　２次方程式 $3x^2-3x+2=0$ の二つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると，

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= -\frac{-3}{3}=1\\ \alpha\beta &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(例終)

練習 203 次の２次方程式の二つの解を α,β とするとき，$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 求めよ。

(1) $x^2-3x-7=0$　　(2) $3x^2+2x+1=0$

(3) $4x^2-12x+9=0$　　(4) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-1=0$

なぜこのようなものを考えるのかすぐにはわかりにくい。方程式の一般論を考える場合に解と係数の関係が鍵となります。それについては大学で数学を勉強してほしい。

本章では一つ応用を示し，その便利さをすこし感じとっておいてもらおうと思います。

19.3.3　２次式の因数分解

この節は整式の世界の話であって，方程式の話ではありません。しかし密接な関係があり，応用できます。

定理（２次式の因数分解）　２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると，

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

証明

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \\ &= a(x-\alpha)(x-\beta) \end{aligned}$$

(証明終)

２次方程式は複素数の範囲で必ず解くことができるので，次の系を得ます。

系 (因数分解の可能性)

どんな２次式も複素数の範囲において必ず因数分解できる。

例　２次方程式の解を用いて，次の式を因数分解してみよう。

(1) x^2-4x-3　　(2) x^2+x+1

解　（１）方程式 $x^2-4x-3=0$ を解くと

$$x=2\pm\sqrt{7}$$

よって

$$\begin{aligned} x^2-4x-3 &= \{x-(2+\sqrt{7})\}\{x-(2-\sqrt{7})\} \\ &= (x-2-\sqrt{7})(x-2+\sqrt{7}) \end{aligned}$$

（2）(1) と同様にして方程式 $x^2+x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

よって

$$x^2+x+1 \quad = \quad \left(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

(例終)

練習 204　2 次方程式の解を用いて，次の式を因数分解せよ。

(1) x^2-x-1　　(2) $2x^2+2x+1$

注意　上では方程式の解に根号や虚数単位がでてくるもののみを挙げましたが，たとえば x^2-4x-5 のようなものに適用しても構いません。(もっとも因数分解の公式を用いたほうが早いとは思うが)。試みてください。 **(注意終)**

19.4　さらに勉強するために

複素数はどうだったでしょうか？　他書と異なり，複素数の定義がなぜあのように定義されるのか，その背景について触れてみたのですが。

もちろん，ここでの説明が絶対ではありません。歴史的にもこういった形で複素数の定義が見つかってきたわけでもありません。

しかし，数学の研究はこんなふうになされるのだろう，そして単に教科書に書かれていることを鵜(う)のみにするのではなく，定義や理論の妥当性を自分で確かめるにはこういったことをしてみるとよいだろう，という観点から書いてみました。

もちろん，これが絶対の方法でもありません。とはいうものの，ここに紹介した方法によって理解が深まり，さらには (自分にとっても，世界にとっても) 新しい理論が発見できるなら素晴らしいことでしょう。

また単なる課題や義務 (！) として教科書や問題集の問題を解くより，(時間はかかるものの) 面白い作業であると思います。是非トライしてほしい。

方程式については次の章まででひとまとまりとなります。