

第20章 さまざまな方程式の解き方

20.0 はじめに

先の章に引き続いて代数方程式の話をしていきます。

3次以上の代数方程式は「高次方程式」と呼ばれます。2次方程式に解の公式があったのと同じように、3次方程式、4次方程式にも解の公式があります。しかしそれは大変複雑であるし、複素数の累乗根と呼ばれる数の考え方など、厳密に扱い出すといくらでも長くなります。また私自身も分かりやすく説明する自信がありません。

そこで本章ではこれまでの高校数学のカリキュラムを踏襲し、我々の持っている道具のみで解ける方程式を扱いました。

本章の内容を簡単に紹介しましょう。

第一節は高次方程式です。

上のような事情から特別な高次方程式のみを扱いましたが、高校の数学で出会う代数方程式はこれで間に合います。また2次方程式のときと同じように、解と係数の関係が成り立つことも紹介しました。

解と係数の関係自身は単純な関係式ですが、これが(本章では扱いませんが)解の公式を見つけていくとき、また現在「ガロア理論」としてまとめられている代数方程式の華麗な理論発見への足掛かりとなります。これについて興味のある人は「さらに勉強するために」で紹介した本などで勉強してください。

第二節は連立方程式です。

第8章「1次方程式の復習」において2元1次連立方程式について、その解き方を復習しました。この節ではそれを前提に連立の2次方程式の解き方を紹介します。

連立2次方程式の一般論はかなりの準備が必要となるのでここでは扱わず、後で必要となる特別な形の方程式の解き方だけを身につけてもらうことを目標としています。1次方程式が直線を表し、 $y = ax^2 + bx + c$ という形の方程式が放物線を表したことから、この節で例題として取り上げられている2次方程式がどんな図形になるのか研究しておくのは、これから先の話を取捨選択することになるし、興味深いと思います。余裕のある人は是非チャレンジしてください。

第三節は「さまざまな方程式」と題しました。

ここでは代数方程式の考え方をさえば簡単に解ける，分数方程式と無理方程式の解き方を紹介します。現在のカリキュラムでは，これらは高校数学では扱わないことになっています。しかし，分数式の計算と同じく，この後のいくつかの場面でこういった方程式を解かなければならなくなるので，紹介することにしました。

方程式を変形していく際，変形前と変形後が同値かどうかには神経を使っていることに注目してもらえれば，と思います。

方程式はこれだけではありません。そのときそのときで解けるタイプの方程式を紹介していくことにしようと思っています。

最後の第四節は複素数の平方根について解説しました。先の「2次方程式の理論」において，複素数を導入しましたが，その際複素数の平方根については後で説明するとした約束を実行したものです。

そしてこれによって「複素係数の2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 」も解の公式によって解くことができる，ことが分かるでしょう。是非複素係数の2次方程式の解の公式を自分自身で導き，自分のノートとしてまとめてください。

20.1 高次方程式

20.1.1 高次方程式とは

3次以上の代数方程式を高次方程式といえます。

高次方程式

この節では次数の高い方程式について解説しましょう。しかし一般論を展開することは，今の段階では準備ができていないので不可能です。

そこで後で必要になる範囲のことだけを解説し，高度な内容については大学へ行って数学を選択するなり，「さらに勉強するために」で紹介する本などで勉強してください。

2次方程式は完全に解くことができました。次に次数の高い方程式は3次方程式です。しかし順番に次数を上げていくのは面倒ですから，まずは最も一般的な n 次方程式を定義しましょう。

これはすでに第8章で与えていますが，それは次のようなものでした。

定義 (n 次方程式) 与えられた方程式を展開，移項などの整理をすることによって

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

(ただし $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ は定数で， $a_n \neq 0$) の形になるものを n 次方程式 n 次方程式
(定義終)

3次方程式はこの特別な場合で，具体的に書き下すと

定義 (3次方程式)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

(ただし a, b, c, d は定数で, $a \neq 0$) の形の方程式を 3 次方程式 という。(定義終) 3 次方程式

となります。

で, 次の問題は「3 次方程式は解けるか」です。

これに対する答は yes であり, 16 世紀半ばにイタリアのタルタリアが 3 次方程式の解の公式を発見しました。

するとその次は「4 次方程式が解けるか」が問題になりますが, これも 16 世紀にフェラリが解の公式を見つけています。

このように行けばどこまでも続くように感じられるかもしれませんが, 幸いはいつまでも続かず (?), 歴史的には 5 次方程式のところで行き詰まりました。そしてついには 19 世紀 この間約 250 年! 「5 次以上の代数方程式の代数的な解の公式は存在しない」という定理が, ノルウエーの数学者アーベルによって証明されました。

しかし一方でドイツの数学者ガウスは, 同じころに

定理 (代数学の基本定理) どんな複素係数の n 次方程式

代数学の基本
定理

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

も複素数の範囲に少なくとも一つ解をもつ。

という定理が成り立つことを証明しました。

ちょっと考えるとこれら二つの結果は矛盾するように感じられるかもしれませんが, 一方は「解の公式がない」といっているながら, 他方は「解は複素数の範囲で必ず見つかる」といっているからです。

しかし上のアーベルの結果をよくみてください。アーベルの結果は「代数的な」解の公式は存在しない, というものです。この代数的というところがポイントで, 要は加減乗除と まだ説明していませんが, 平方根を一般化した 累乗根によって解を求めることができない, といっているのです。一方ガウスの結果は どうやって求めるか, あるいは求める方法があるかどうかは別にして ともかく解が複素数の範囲にあることだけを保証しています。

このように考えるとアーベルの結果とガウスの結果は矛盾しません¹。

これらのことについては, 現在は「ガロアの理論」としてまとめられており, 大学の数学科で勉強することができます。

それほど高度な内容を持っているので, これらについてはここでは 解の公式を含めて 他の書物に譲り, 今我々の持っている道具だけでなんとかなる部分だけを解説することにします。

¹後になって「代数的でない」5 次方程式の解の公式が見つかっています。

20.1.2 高次方程式の解き方 因数分解を用いて

先の節のような状況なので、ここでは高次方程式を因数分解を用いて解く方法を紹介します。

これはたとえば与えられた方程式が $a(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = 0$ のように因数分解できたとすると、「方程式解法の原理」によって

$$x - a_1 = 0 \quad \text{または} \quad x - a_2 = 0 \quad \text{または} \quad \cdots \quad \text{または} \quad x - a_n = 0$$

となるので² 方程式の解が

$$x = a_1, a_2, \cdots, a_n$$

となることが結論できます。

ではどうやって因数分解すればよいでしょう？

その方法はすでに第1章「整式の性質」で紹介しました。「因数定理」を使うのです。これは

系 (因数定理) 整式 $P(x)$ が $x - \alpha$ で割り切れる $\iff P(\alpha) = 0$ 因数定理

というものでした。

これを使って高次方程式を解いて見せましょう。

例 $x^3 - 2x - 1 = 0$ を解こう。

左辺の $x^3 - 2x - 1$ を因数分解します。因数分解するためにはいろいろな値を代入してみるのです。そのために $P(x) = x^3 - 2x - 1$ とおきましょう。

$$P(-1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

ですから、 $P(x)$ は $x + 1$ で割り切れ、

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - x - 1)$$

と因数分解できます。

よって元の方程式は

$$(x + 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

ゆえに

$$x + 1 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

これより

$$x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

² 「方程式解法の原理」は「 $\alpha\beta = 0$ ならば $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ 」というように二つの数 α, β についてのものですが、これは三つ以上であっても同様に成り立ちます。

たとえば「 $\alpha\beta\gamma = 0$ ならば $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ または $\gamma = 0$ 」となります。

(例終)

注意 2次方程式の解の公式は知っているので，上で得られた2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ は因数分解する必要はありません。(注意終)

例 $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$ はどうでしょう。

$P(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ とおく。 $P(1) = 0$ より $P(x) = (x - 1)(x^3 + 4x^2 + 6x + 4)$ 。

$Q(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ とおくと， $Q(-2) = 0$ 。よって $Q(x) = (x + 2)(x^2 + 2x + 2)$ 。

ゆえに元の方程式は

$$(x - 1)(x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

よって

$$x - 1 = 0 \quad \text{または} \quad x + 2 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + 2x + 2 = 0$$

ゆえに

$$x = 1, -2, -1 \pm \sqrt{3}i$$

(例終)

練習 205 次の方程式を解け。

(1) $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$

(2) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$

(3) $x^3 - (a + 2)x^2 + (2a + 4)x - 4a = 0$

(ヒント：(3) はちょっとびっくりするかもしれませんが，代入すべき候補は $-4a$ の約数であり，考え方は今までと変わりません。)

5次以上の方程式についても同様の方法で解けるであろうことが，容易に想像できるでしょう。これ以上は単に手間が増えるだけなのでもう触れません。ちなみに大学入試では，このような方法で解けるような問題だけが出題されるので，3次方程式や4次方程式の解の公式を知らなくても困ることはないでしょう。

以上で高次方程式については終わりにしますが，応用として因数分解と解の個数について片をつけておきましょう。

先にどんな2次式も複素数の範囲で因数分解できることを示しました。この定理はさらに一般化でき，先にあげた「代数学の基本定理」と組み合わせることで次の結果が得られます。

系 (因数分解の可能性) どんな1元 n 次式も，複素数の範囲において必ず1次式の積に分解できる。

これより次の定理を得ます。

定理 (n 次方程式の解の個数) n 次方程式は複素数の範囲に (重複をこめて) n 個の解を持つ。

重解についてはちょっと分かりにくいと思うので, 具体的な方程式で説明しましょう。

例 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ を解こう。

この方程式の左辺は簡単に因数分解できて,

$$(x + 1)(x - 1)^2 = 0$$

を得ます (自力で因数分解せよ)。

よって解は $x = 1, 1, -1$ で 1 は重解である。

この例の場合重解 1 は、「重複度が 2 である」ということがあります。 (例終) 重複度

例 $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ はどうでしょう。

これも左辺が因数分解できて

$$(x + 1)^3 = 0$$

となります。

よって解は $x = -1, -1, -1$ 。

この例の場合は -1 が重解で, 重複度は 3 。あるいは「 -1 は三重解である」ともいいます。 (例終)

ちょっと抽象的な書き方になりますが, 厳密な定義を与えておきましょう。先の例と照らし合わせて理解してください。

定義 (重解) n 次方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ が

$$a_n (x - \alpha_1)^{p_1} \cdots (x - \alpha_l)^{p_l} = 0$$

ただし $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ はすべて異なる, と因数分解でき, p_i が 1 より大きいとき, $x = \alpha_i$ は p_i 重解 であるという。

ただし 2 重解は単に重解という。 (定義終)

練習 206 次の方程式を解け。

(1) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

(2) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

20.1.3 1の立方根

話がちょっと脇道にそれますが、高次方程式を解くことの応用例の一つとして、1の3乗根について触れておきましょう。

この先を読む前に、前節の復習を兼ねて方程式 $x^3 - 1 = 0$ を解いてみてください。

左辺は $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ と因数分解できます。よって解は $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ となります。

もとの方程式 $x^3 - 1 = 0$ は1を移項すれば $x^3 = 1$ となります。

このことから、上で得られた三つの値 $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ はいずれも3乗すると1となります。

定義 (3乗根, 立方根) 3乗すると a となる数, つまり方程式 $x^3 = a$ の解を a の3乗根, あるいは立方根という。 (定義終)

3乗根
立方根

この言葉を使うなら $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ は1の立方根である, ということができます。

1の立方根はいろいろな性質を持っているので, さまざまな形で入試に取り上げられています。そのいくつかを演習編で取り上げることにしましょう。

20.1.4 高次方程式の解と係数の関係

2次方程式の場合と同じように, 高次方程式においても解と係数の関係が成り立ちます。

たとえば3次方程式の場合,

定理 (3次方程式の解と係数の関係) 3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の三つの解を α, β, γ とするとき

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma &= -\frac{d}{a}\end{aligned}$$

これら三つの式を 3次方程式の解と係数の関係 という

解と係数の関係

証明 方程式解法の原理より, 方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の左辺は

$$a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$$

と因数分解できる。左辺を展開すると

$$a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = ax^3 - a(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - a\alpha\beta\gamma$$

これをもとの方程式の左辺と係数を比較すれば

$$\begin{aligned} b &= -a(\alpha + \beta + \gamma) \\ c &= a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ d &= -a\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

これより求める関係を得る。

(証明終)

注意

- (1) 解と係数の関係における右辺の符号に注意してほしい。
- (2) 2次方程式の解と係数の関係は，解の公式を用い直接計算することで得られました。。ここでは3次方程式の解の公式を知らないにもかかわらず，解と係数の関係が得られました。上の証明法を用いれば，2次方程式の場合でも解の公式を使わず解と係数の関係を導くことができます。試みてください。また4次以上の方程式についても解と係数の関係を導くことができます。これも試みてください

(注意終)

例 方程式 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$ の三つの解を α, β, γ とすると

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 6 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= 12 \\ \alpha\beta\gamma &= 8 \end{aligned}$$

(例終)

解と係数の関係を使うと容易に解決するような問題の例を，一つ挙げましょう。

例題 75 方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 24 = 0$ は2と3を解に持つ。このとき定数 a, b の値および残りの解を求めよ。

解説 この問題自体は，解と係数の関係を使わなくても解くことができます。実際，2と3が解なので代入することで a と b に関する方程式が二つ得られ，それを解き，もとの式に代入すれば残りの解を求めることができますからです。

しかしそのようにすると3次方程式を解かなければならず，できなくはないがやや面倒です(とはいうものの，この方法も試みてほしい)。そこでここでは3次方程式の解と係数の関係を用いましょう。

三つ目の解を α とでもしましょう。すると解と係数の関係より、

$$\begin{aligned}2 + 3 + \alpha &= -a \\6 + 2\alpha + 3\alpha &= b \\6\alpha &= -24\end{aligned}$$

すると今の場合、3番目の式から残りの解がすぐにわかり、あとの二つの式から a, b の値が出ます。

解答例 残りの解を α とする。
解と係数の関係より、

$$\begin{aligned}2 + 3 + \alpha &= -a \\6 + 2\alpha + 3\alpha &= b \\6\alpha &= -24\end{aligned}$$

これを解くと

$$a = -1, b = -14, \alpha = -4 \cdots (\text{答})$$

(解答例終)

練習 207 方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ は 1 と -2 を解に持つ。このとき定数 a, b の値および残りの解を求めよ。

20.1.5 整式の世界の「素因数」

この節は大変難しいものを含んでいます。先を急ぐ人は飛ばしても構いません。さて、この節では「因数分解できる整式とそうでない整式はどうやって見分けるか」について説明しましょう。

とはいうものの先の節の結果、つまり「どんな n 次式も複素数の範囲で必ず 1 次式の積に因数分解できる」で、はじめの方の問題はひとまず解決しています。

ということは、どんな式でも因数分解できるはずですが、しかし第 1 章「整式の基礎」ではこれ以上因数分解できないとしたものがありました。これはなぜでしょう。

もちろんあの段階では複素数のことはまったく知りませんでした。それと定理をよくみれば「複素数の範囲内で 1 次式の積に分解できる」とあって、数の範囲は「複素数」です。

言い替えるとこの条件が満たされない、つまり複素数より狭い数の範囲、たとえば実数の範囲や有理数、整数の範囲では因数分解できるものとできないものがありうる、ということです。

このように見れば、先のことは簡単に了解できるでしょう。

高校の数学では基本的に実数の世界を舞台に様々な議論をします。そして因数分解については、ほぼ整数の範囲で考えるのが習慣となっています。

すると今考えている数の範囲で、あるいはどの数の範囲で与えられた式が因数分解できるのかが問題になります。幸いなことにこの問題はここまでの知識で簡単に解決できます。

実際 $ax^2 + bx + c$ を $a(x - \alpha)(x - \beta)$ と因数分解したときに現れる二つの数 α, β は、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解でした。そして α, β が有理数、無理数、虚数のいずれになるのかが、この2次方程式の判別式によって判定できます。

たとえば判別式 $b^2 - 4ac$ が平方数³ だったら、解の公式の中の根号がはずれるので、 x^2 の係数と x の係数である a, b が有理数なら解は有理数となるし、 $b^2 - 4ac$ が平方数でない正の数で a, b が実数なら、解は実数。判別式が負なら虚数となります。

つまり与えられた2次式の係数を使うことで、どの範囲で因数分解できるのかがはっきりと判定できるのです。

例で今のことを確認しましょう。

例 たとえば $x^2 - 5x + 6$ は、すぐに $(x - 2)(x - 3)$ と因数分解できることに気がつくでしょう。対応する2次方程式の判別式 D を考えると

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

となり、1は平方数。また x^2 の係数は1、 x の係数は-5。よって有理数の範囲で因数分解できます⁴。(例終)

例 $x^2 + x - 1$ はどうでしょう。対応する2次方程式の判別式を計算すると

$$D' = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$

よって実数の範囲で因数分解できます。(例終)

例 最後に $x^2 + x + 1$ は、対応する判別式 D'' が

$$D'' = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$$

よって複素数の範囲で因数分解できます。(例終)

練習 208 次の式は有理数、実数、複素数のいずれの範囲で因数分解できるか。

(1) $x^2 - 12x - 1$

(2) $3x^2 + 2x + 1$

(3) $4x^2 - 16x + 15$

(ヒント：どの数の範囲で因数分解できるかを判定するために、対応する2次方程式の判別式を用いた。一方方程式が $ax^2 + 2bx + c = 0$ の形をしているときには、判別式として $D/4$ を使えた。今の場合も同様である(確かめよ)。)

もう一つ、「整数には素数というものがあつた整式の世界で素数に対応するものはなんだろうか？」を考えましょう。

そのために素数の定義を復習しましょう。

³ある整数の2乗の形をした整数。

⁴実際には整数の範囲で因数分解できています。。これを判定する方法もあるのだが、ちょっと難しいので機会があつたら紹介しましょう。

定義 (素数) 1 とその数自身しか約数を持たない数を 素数 という。ただし 1 は素数と考
えない。 (定義終)

約数の考え方は整式の世界でも成り立ちました。それゆえこれを真似してひとまず定義
してみましょう。

定義 (既約多項式) 数とその式自身しか約数を持たない多項式を 既約^{きやく} 多項式, あるいは 既約多項式
この多項式は 既約である という⁵。ただし数は既約と考えない。 (定義終)

定義はしてみたものの, これで本当によいのでしょうか?

よいといえばよいのですが, ちょっと問題があります。実際, 上で触れたように考えて
いる数の範囲によって因数分解できたりできなかったりするからです。例を挙げましょう。

例 $x^2 - 4$ は因数分解すると

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

となる。

$x^2 - 2$ は今までの我々の感覚では分解できないが, 先の節のことを使えば

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

と因数分解できる。ここで 2 は整数であるのに対して, $\sqrt{2}$ は無理数であることに注意。

さらに $x^2 + 2$ は

$$x^2 + 2 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

と因数分解できるが, $\sqrt{2}i$ は虚数である。

$x^2 - 4$ は整数, 実数, 複素数のいずれの世界でも因数分解できる。 $x^2 - 2$ は整数では
因数分解できないが, 実数, 複素数の世界で因数分解できる。さらに $x^2 + 2$ は整数, 実
数の世界では因数分解できないが, 複素数の世界のみで因数分解できる。

上で定義した言葉を使うなら, $x^2 - 2$ は整数では既約であるが, 実数, 複素数では既約
でない。また $x^2 + 2$ は整数, 実数で既約だが, 複素数では既約ではない。 (例終)

このように係数にどのような数を許すのかに応じて, 一つの多項式が既約になったり,
既約にならなかったりするのです。

よって先の定義の中, あるいは因数分解を考えるとときにはどこ世界で考えているのか,
議論しているのかを意識しなければなりません。

高校あるいは大学入試で「因数分解せよ」というときには たまには例外はあるも
のの特に断り書きがない限り たいてい整数あるいは有理数の範囲でなせ, という意味
です。

⁵多項式の場合, 素数とはいわず既約多項式といいます。

これには一般論におけるある事情があるのだが, このシリーズの範囲をはるかに越えてしまう
ので, 大学あるいは数学の専門書で勉強してほしい。

20.2 連立方程式(再) 2元2次連立方程式

第8章「1次方程式の復習」で連立方程式の解き方を説明しました。しかし扱った方程式はいずれも1次でした。

ここでは一方、あるいは両方が2次の連立方程式の解き方を説明しましょう。

連立方程式の解き方の基本的な考え方は、いくつかある未知数を与えられたいくつかの方程式をうまく使って消去し、文字の数を減らしていくことでした。

この考え方は次数が上がっても同様です。

まずは1次方程式と2次方程式を組み合わせた連立方程式から。

例題 76 連立方程式

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

を解け。

解説 一方が1次式なので必ずどちらかの文字について解くことができます。どちらの文字について解いても同じ解が得られるので、解きやすい方の文字を消去しましょう。

解答例

$$\begin{cases} x - y = 4 & \dots\dots(1) \\ x^2 - 3y^2 = 6 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

と番号をつける。

(1) より $x = y + 4$ 。これを (1)' としよう。これを (2) に代入して整理すると

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

これを解くと $y = -1, 5$ 。

(1) $y = -1$ のとき (1)' に代入して $x = 3$ 。

(2) $y = 5$ のとき (1)' に代入して $x = 9$ 。

$$x = 3, y = -1 \text{ または } x = 9, y = 5 \dots(\text{答})$$

(解答例終)

練習 209 以下の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = -5 \\ x^2 + xy + y^2 = 20 \end{cases}$$

1次と2次の方程式を組み合わせるタイプは、基本的に上のようにすればよいが、方程式が次の例題のような特殊な形の場合、別の解き方もあります。

例題 77 連立方程式

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 4 \end{cases}$$

を解け。

解説 これも第一式を一方のものについて解いて、第二式に代入するという方法で解くことができます。

しかしここで与えられた方程式は特殊な形をしています。それは一方は和、他方は積の形をしているのです。

こういった形の式に我々は出会っています。

そう、解と係数の関係です。

これを応用するなら、この連立方程式の解である x, y は2次方程式

$$t^2 - 2t + 4 = 0$$

の解であることがわかります (係数の符号に注意)。

よって与えられた連立方程式を解く代わりに、この2次方程式を解けばよいこととなります。

解答例 与えられた連立方程式より x, y は2次方程式

$$t^2 - 2t + 4 = 0$$

の解である。

これを解くと

$$t = 1 \pm \sqrt{3}i$$

よって、

$$x = 1 \pm \sqrt{3}i, y = 1 \mp \sqrt{3}i \quad (\text{復号同順})$$

(解答例終)

注意

- (1) 2次方程式の解は二つあるが、どちらが x なのか y なのか断定することはできません。それゆえ解答例のように書きます。
- (2) 同じような解を何度も書くのは面倒です。この例題の答えのように、異なる部分がプラスマイナスだけの場合にはこの例題の答え方のように、

$$x = 1 \pm \sqrt{3}i, y = 1 \mp \sqrt{3}i \quad (\text{複号同順})$$

のように書いても構いません。平方根のところでは触れたように \pm という記号を 複号 複号
 といいます (今の場合 \mp もそうである)。「複号同順」とは、各組で x の値の上、下の
 符号に応じて y の値のそれぞれ上、下の符号をとる、という意味です。

上の場合にいうなら x の方で $+$ 、つまり $x = 1 + \sqrt{3}i$ をとったら y の方では $-$ 、つ
 まり $y = 1 - \sqrt{3}i$ をとる、という意味です。

こういった場合「複号同順」という言葉をつけ忘れないように！
 もし忘れると、つまり

$$x = 1 \pm \sqrt{3}i, y = 1 \mp \sqrt{3}i$$

のように書くと、プラスマイナスのすべての組合せを考えることになり、全部で四つ
 の値を表していることになってしまいます!!

今後使いたいので意味をきちんとつかんでおいてください。

(注意終)

練習 210 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -42 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 3 \\ (x - 3)(y - 3) = 2 \end{cases}$$

次に 2 式とも 2 次方程式の場合をやってみよう。

例題 78 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

を解け。

解説 2 式とも 2 次方程式である連立方程式の解き方はいくつかありますが、こ
 こに挙げた例題が基本となります。

まずこの例題の場合、第二式がちょっと特殊な形をしていることに注意してくだ
 さい。左辺が因数分解できる形をしているのです。

実行すると

$$(x + 2y)(2x - y) = 0$$

よって

$$x + 2y = 0 \quad \text{または} \quad 2x - y = 0$$

さてここで、連立方程式

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

を解くとは $f(x, y) = 0$ を満たすと同時に $g(x, y) = 0$ を満たすような値の組を求めることでした。言い替えると「 $f(\alpha, \beta) = 0$ かつ $g(\alpha, \beta) = 0$ 」となる数の組 (α, β) を求めることでした。

ここで二つの式が「かつ」で結ばれていることに注意してください。

一方、今この例題では、第二式が因数分解されて $g_1(x, y) = 0$ または $g_2(x, y) = 0$ という形になりました。

つまりもとの方程式は

$$f(\alpha, \beta) = 0 \text{ かつ } (g_1(\alpha, \beta) = 0 \text{ または } g_2(\alpha, \beta) = 0)$$

を満たす数の組 (α, β) を求めればよいことになります (上の命題でかっこがついていることに注意)。

上のように書くと複雑な形をしていてちょっと分かりにくいですが、解くべき方程式は結局 $p \wedge (q_1 \vee q_2)$ の形をしています。

第 6 章「論理」で述べたように $p \wedge (q_1 \vee q_2)$ は (ド・モルガンの法則によって) $(p \wedge q_1) \vee (p \wedge q_2)$ と同値でした。

以上のことから結局

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

という連立方程式と、

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

という連立方程式を解けばよいことになります。後は解答例から明らかでしょう。

解答例 第二式を因数分解すると

$$(x + 2y)(2x - y) = 0$$

よって

$$x + 2y = 0 \text{ または } 2x - y = 0$$

(イ) $x + 2y = 0$ のとき

$$x = -2y \text{ を第一式に代入して解くと } x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, y = \mp \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (複号同順)}。$$

(ロ) $2x - y = 0$ のとき

$$y = 2x \text{ を第一式に代入して解くと } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i, y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}i \text{ (複号同順)}。$$

(解答例終)

練習 211 連立方程式

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

を解け。

例題 79 連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - xy = 4x + 2y \\ y^2 - xy = 2x + y \end{cases}$$

を解け。

解説 いずれの式も因数分解できません。それゆえ解けないかということそうでもありません。これら二つの式を使って変形すると、先の例題のように因数分解できる形になります。

実際第二式の2倍を第一式から引くと

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0$$

となり、この方程式の左辺は因数分解できます。

よって連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - xy = 4x + 2y \\ y^2 - xy = 2x + y \end{cases}$$

を解く代わりに、連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - xy = 4x + 2y \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

を解けばよいことになります。

問 116 二つの連立方程式 $\begin{cases} x^2 - xy = 4x + 2y \\ y^2 - xy = 2x + y \end{cases}$ と $\begin{cases} x^2 - xy = 4x + 2y \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$ は同値

である。これを証明せよ。

解答例

$$\begin{cases} x^2 - xy = 4x + 2y & \cdots \cdots (1) \\ y^2 - xy = 2x + y & \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

とする。(1) - 2 × (2) を作ると

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0 \quad \cdots \cdots (3)$$

よって連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - xy = 4x + 2y \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

を解けばよい。

(3) より

$$x - y = 0 \quad \text{または} \quad x + 2y = 0$$

- (イ) $x - y = 0$ のとき (1) に代入して解くと $x = 0, y = 0$ 。
 (ロ) $x + 2y = 0$ のとき (1) に代入して解くと $x = 0, y = 0$ または $x = 2, y = -1$ 。
 (解答例終)

注意 一般に 2 式とも 2 次の連立方程式は四つの解を持ちます (なぜか?)。上の例題ではたまたま二つになったに過ぎません。

後で方程式と図形の関係を知れば理解できますが、この例題の場合は重解になっているのです。
 (注意終)

練習 212 連立方程式

$$\begin{cases} x - x^2 - 2xy = 0 \\ y - y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

を解け。

(ヒント: $2xy$ を消去せよ。)

20.3 さまざまな方程式の解き方

この節では代数方程式以外で、今もっている知識で解けるような方程式について若干^{じゃっかん} 触れることにします。

20.3.1 分数方程式

未知数についての分数式を含む方程式を 分数方程式 といいます。
 次の例題で解き方を説明しましょう。

分数方程式

例題 80 方程式

$$\frac{3}{x-1} - \frac{6}{x^2-1} = 1$$

を解け。

解説 我々が解けるのは代数方程式すから、このままでは解くことができません。そこでなんとか代数方程式に変形します。

等式は両辺に同じ数をかけても等しかった。よって与えられた分数方程式の分母の最小公倍数を両辺にかけましょう。

今の場合、分母はそれぞれ $x - 1, (x + 1)(x - 1)$ ですから、最小公倍数は $(x + 1)(x - 1)$ 。これを両辺にかけ約分すると

$$3(x + 1) - 6 = x^2 - 1$$

これは代数方程式ですから，これまでの知識で解けます⁶。

しかしちょっと注意してほしいのは，この変形は同値変形ではないということです。

実際，同値になるのは0でない同じ数をかけた場合であり，分母を払って得られた代数方程式の解の中には最小公倍数に代入したときにその値が0になるものがあるかもしれません。もしそのような値があれば，それは解ではありません。

解答例 与えられた方程式の分母を払うと

$$3(x+1) - 6 = x^2 - 1$$

これを解くと $x = 1, 2$ 。しかし $x = 1$ はもとの方程式の分母を0にするので不適。

$$x = 2 \cdots (\text{答})$$

(解答例終)

練習 213 方程式

$$2 + \frac{1}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} = 0$$

を解け。

上で説明したように，分母を払って得られた方程式の解がすべてもとの分数方程式の解となるとは限らないので，次のようなことも起きます。

例 方程式

$$\frac{x^2}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} = \frac{x}{3(x+3)} + \frac{3}{x^2-9} + 1$$

を解こう。

分母を払って解くと $x = \pm 3$ を得る (確かめよ!)。しかしいずれの値も分母を0にしてしまう。

つまりこの場合は「解なし」となる。

(例終)

20.3.2 無理方程式

未知数についての平方根を含む方程式，つまり

$$\sqrt{A} = B \quad (A, B \text{ は } x \text{ の多項式})$$

の形の方程式を無理方程式といいます。

無理方程式

無理方程式においては未知数および式の値はすべて実数とします。

⁶このように分数方程式の分母の最小公倍数を両辺にかけて整理することを分母を払うといいます。

例題 81 方程式

$$\sqrt{1-x} = x+1$$

を解け。

解説 分数方程式のときと同じく、このままでは解くことができません。今の場合根号が邪魔になっています。これを取り除くには、 $(\sqrt{1-x})^2$ を作ればよい。つまり両辺を 2 乗すればいいわけです。

しかし これも分数方程式の場合と同じく この変形は同値ではありません。実際「 $a=b \implies a^2=b^2$ 」は成り立ちますが、逆は無条件では成立しませんでした(どんな条件があればよかったですでしょう? 考えよ)。

それゆえもともとの解とは関係ないものが入ってきます。それを吟味しておけばよいのです。

解答例 与えられた方程式の両辺を 2 乗すると

$$1-x = (x+1)^2$$

これを解いて $x = 0, -3$ 。

(1) $x = 0$ のとき

$$\text{(左辺)} = \sqrt{1-0} = 1$$

$$\text{(右辺)} = 0+1 = 1$$

等しいので解である。

(2) $x = -3$ のとき

$$\text{(左辺)} = \sqrt{1-(-3)} = 2$$

$$\text{(右辺)} = 0+(-3) = -2$$

等しくないので解でない。

$$x = 0 \cdots (\text{答})$$

(解答例終)

練習 214 次の方程式を解け。

(1) $\sqrt{x+2} = x$

(2) $\sqrt{8-x} = 2-x$

(3) $2x+9-\sqrt{3-2x} = 0$

20.4 複素数の平方根について

本章の最後の話として複素数の平方根について触れておきましょう。

先の章において「どんな実数も複素数の範囲内で平方根を持つ」ことを説明しました。その際、複素数の平方根については後で触れる、としました。これは連立方程式が解けること、簡単な分数方程式が解けることの二つができないとどうにもならなかったからで、ここまでの話で準備が整ったのではじめてみましょう。

一般論は後ですることにし、具体的な例でお話しします。

例 $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$ となる z を求める。

まだ複素数の平方根があるかどうか分かりませんが、まずはあるとして議論しましょう。これは1次方程式の解が存在するとして、それがどのような形をしているかを調べたのと同様です。

そこで $(x + yi)^2 = 1 + \sqrt{3}i$ となったとしましょう。ここで x, y は実数であることを、頭の隅に入れておいてください。

左辺を展開すると $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ 。

二つの複素数 $a + bi$ と $c + di$ は $a = c, b = d$ のとき、そのときに限り等しかったので、連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \sqrt{3} \end{cases}$$

を得ます。これが解ければ平方根が求まります。

さて、第二式の右辺は0でないので x, y のいずれも0になりません。そこで第二式の両辺を $2x$ で割ると $y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$ 。これを第一式に代入すると

$$x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1$$

両辺に $4x^2$ をかけて分母を払い整理すると

$$4x^4 - 4x^2 - 3 = 0$$

これは x^2 についての2次式と考えることができます。

そう見たとき

$$(2x^2 - 3)(2x^2 + 1) = 0$$

と因数分解できる。これより

$$x^2 = \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$$

x は実数だったので $x^2 \geq 0$ 。ゆえに $x^2 = \frac{3}{2}$ 。

よって

$$x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$ に代入して y を求めると,

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ただし, 複号同順です。

よって

$$z = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

逆にこれらを 2 乗すると $1 + \sqrt{3}i$ となることは, 上の議論を逆に辿ればわかります。

以上のことから複素数 i の平方根は複素数内にあり, それは $z = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (複号同順) の二つであることが分かりました。 (例終)

では一般に $a + bi$ ($b \neq 0$) は平方根を持つでしょうか。

上の例と同じようにやってみましょう (意欲のある人は, この先を読む前に自分で計算してほしい)。つまり $(x + yi)^2 = a + bi$ となる実数 x, y があるとしたら, それはどのような形をしているのかを調べます。

上と同様にして連立方程式

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

を得ます。

$2xy = b$ で, b は 0 でないので, x, y のいずれも 0 になりません (方程式解法の原理)。

そこでこの式の両辺を $2x$ で割ると $y = \frac{b}{2x}$ 。これを第一式に代入すると

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

両辺に $4x^2$ をかけて分母を払い整理すると,

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

となり, x についての 4 次方程式が得られます。

さっきと同じように x^2 についての 2 次方程式と考えますが, この x^2 についての方程式が実数解をもつかどうかは明らかではありません。

そこで判別式 D を計算してみましょう。

$$D/4 = (-2a)^2 - 4 \times (-b^2) = 4a^2 + 4b^2 = 4(a^2 + b^2)$$

a, b は実数で $b \neq 0$ であったから $a^2 + b^2 > 0$ 。つまり $D > 0$ となり x^2 についての方程式

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

は二つの実数解を持ちます。

具体的に計算すると

$$x^2 = \frac{2a \pm \sqrt{4(a^2 + b^2)}}{4} = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}$$

分子を見ると $a < \sqrt{(a^2 + b^2)}$ であるから、正の解と負の解が一つずつある。 x は実数としたので $x^2 \geq 0$ 。よって負の方は捨てると、

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}$$

つまり x は実数 $\frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2}$ の平方根です。

このそれぞれの値に対して、 $y = \frac{b}{2x}$ より y が求まります。

以上から $(x + yi)^2 = a + bi$ となる実数 x, y が存在することが分かります。

定理としてまとめましょう。

定理 (複素数の平方根) 任意の複素数 $a + bi$ は複素数内にちょうど二つの平方根を持つ。

練習 215 $1 + 2\sqrt{2}i$ の平方根を計算せよ。

20.5 さらに勉強するために

第一節のはじめに少しだけ方程式の歴史について触れましたが、これについては話したいことがたくさんあります。代数方程式くらい、華麗で波乱に富んだ、そしてロマンチックな数学の歴史はないでしょう。しかしながら、私自身不勉強なため、分かりやすく説明することができません。

方程式解法の歴史を^{たど} 辿ることは、現代数学への入門として恰好の教材となると思います。

そういったことに興味を持った人は先にも紹介した、

数 III 方式 ガロアの理論、矢カ部巖著、現代数学社、1976 年
を読んでほしい。

現在ガロア理論は、矢カ部先生の解説からは想像できない程、数学的にかなり整理され、抽象的なものとなっています。その差異は^{がくせん} 愕然とするくらいです。

とはいうもののそういう方面への入門書として、高校生くらいの知識で読みはじめられるものとして

代数系入門，松坂和夫著，岩波書店，1976年

現代代数学概論，G. バーコフ，S. マクレーン著，白水社，1961年の二つを挙げておきましょう。

後者は整数の話から始まって，ガロア理論まで至ります。これも500ページを越える大著ですが，読みやすいものと思います。

いずれも抽象代数学への入門書としてよいものでしょう。

抽象的に扱うことの利点がこれらの書物によって理解できてくるものと思います。実際，抽象的に扱うことによってその本質が浮き彫りとなり，さらには他分野への応用も可能になってくるのです。

今までの高校数学のカリキュラムの中で，2次方程式の「解と係数の関係」ほど中途半端な扱いになっているものはないでしょう。実際解と係数の関係を使った求値問題くらいにしか応用されませんが，矢部先生の本を読めば分かるようにこの関係が方程式の理論を発見していく過程において重要な役割を果たします。

こういった，高校数学では触れることのできない部分も是非勉強しておいてほしいと思います。