第21章　図形と方程式

21.0　はじめに

ここまでの章で，何度か図形と式の対応というテーマについて触れてきました。本章では，このテーマの初歩を解説しましょう。

基本的なアイデアは，平面内に座標軸と呼ばれる2本の直線を導入することによって実現されます。このアイデアは16世紀の哲学者であるデカルトによって出され,「解析幾何学」と呼ばれる分野にまで成長しました[1]。

その理由は，中学校までで学習してきたユークリッド幾何学が，補助線などかなり深い経験と知識，その上センスが必要であったのに対して，デカルトによる方法だと，単なる計算で済んでしまうことが多かったことと，平面と空間という一見異なるものに対して同じようなアプローチ，および手法，結果が得られるところにありました。

本章の前半ではこういった壮大な理論への第一歩として，点と座標の対応づけの部分を詳説しました。図形的な考え方の一つ一つを，座標を用いたものに翻訳していっているので，じっくり取り組み，慣れていってほしい。

また，内容が図形を対象としたものなので，中学校で学習した図形の性質があちらこちらで使われることになります。こういったことについての知識はすでによく知っているものとして解説をしたかったのですが，中学校までに扱われないいくつかの事実についても，知っていておいてほしいことがあったので，復習も兼ねてこれらを補講で補っています。あわせて勉強してください。

本章の後半では，解析幾何学の初歩の解説を続けます。

まず基本的な対象として直線を取り上げます。直線に関しては，関数という観点と方程式という観点からすでに大分説明してきました (「1次関数の復習」,「1次方程式の復習」)。本章ではこれらの知識を前提に，さらに深い結果を導いています。

次に取り上げた対象は円です。

円はギリシャ時代には「もっとも美しい図形」といわれていました。そのせいもあって，円の性質は深く研究されてきています。まず円の方程式を導き，それ

[1] 彼の著作「方法序説」の付録としてはじめて世に出たものです。「方法序説」は岩波文庫で読むことができます。しかしその付録である「幾何学」はついていません。

をもとに，円と直線の関係について解説しました。また，円と直線との関係においてもっとも興味あるのは直線が円に接する場合，つまり接線に関する状況です。これに関して基本的な定理をいくつか紹介しました。
本章の最後では，軌跡を取り上げました。これは初等幾何において，もっとも興味のある問題なのですが，その扱いが結構繁雑であることから，最近はあまり深く扱いません。本書においても，あまり深くまで追求せず，基本的なあつかいにとどめました。興味のある人は，初等幾何の参考書で勉強してください。

解析幾何学は，デカルトをもってそのはじめとしますが，先にも書きましたように，できるだけ図形に対するセンスにたよらず，計算という機械的なものによって数学の研究ができるようになる，ということがその趣旨でした。それゆえ，この手法の優秀さを実感するには，幾何学の問題をたくさんこの手法によって解いてみることが一番です。
それによって，この手法の限界も見えてくることでしょう。是非，中学校のときに学習したさまざまな定理の，座標を用いた証明を試みてほしい。

21.1　点の座標

21.1.1　直線上の点

本章では，平面上の図形の性質を方程式を用いて調べる方法を紹介していきますが，その準備として，直線上の基本的な考え方から始めることにします。
図形で使われてきた言葉が，数を使った言葉にどんなふうに翻訳されていくのかをよく見てください。

直線上の点の座標

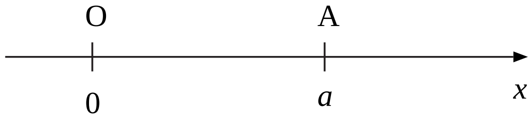
第 4 章「実数の性質」で，数直線という考え方を紹介しました。これは，直線上に二つの点 O と E を決めると，それに応じて直線上の点と実数が過不足なく対応する，という事実を元になされました。
定義を復習しておきましょう。

定義 (座標，数直線，原点)　直線上の点 A に対応する実数 a を，点 A の **座標** といい，A(a) と表す。座標を考えた直線を **数直線** という。 **座標** **数直線**
数直線上の基準となる二つの点のうち O（オー）を **原点** という。　**(定義終)** **原点**

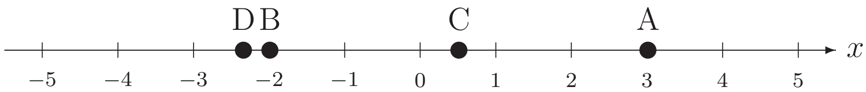
注意
(1) 定義から原点 O には数 0 が対応するので，原点 O の座標は 0 である。
(2) 一般的な議論をするときには，点の名前はアルファベットの大文字を使い，その座標には対応する小文字を使うのが習慣である。

(注意終)

A(a) を数直線上に表すと次の図のようになります。



いくつかの点を表してみましょう。
A(3), B(−2), C$\left(\frac{1}{2}\right)$, D($-\sqrt{5}$) は次のようになります。



練習 216 A(1), B(−3) を数直線上に表せ。

２点間の距離

２点 A(a), B(b) に対してその間の距離 d を次のように定義します。

定義 (直線上の２点間の距離) ２点 A(a), B(b) に対して，その間の **距離** d を 線分 AB の長さで定義する。すなわち, **距離**

$$d = d(A,\ B) = \mathrm{AB}$$

と定める。 **(定義終)**

定理 (直線上の２点間の距離) ２点 A(a), B(b) に対して，その間の距離 d は,

$$d = d(A,\ B) = |b - a|$$

注意

(1) $d(A,\ B)$ という記号は，高校ではあまり使いません。この記号には「A から B までの距離」という意味あいを込めています。つまりどこから測り始めるのか，まず基準となる点があるということを強調しているのです。ただし,「A から B まで」といういい方に対して，実際の計算は $|b-a|$ となっていて，順番が逆になっていることに注意してほしい。
議論の対象となっている 2 点が明らかな場合は単に d と書くこともありますが，本書ではできるだけ，$d(A,\ B)$ という記号で表すことにしたいと思います。
(2) ２点 A，B 間の距離を AB で表すこともあります (この表し方でも点の順番が決まっていることに注意！)。本書ではこの表し方を使うこともあるでしょう。
(3) d は distance の d です。
(4) 証明は補講で与えます。

(注意終)

例　A(2)，B(−3) の間の距離 $d(A,\ B)$ は

$$d(A,\ B)=|(-3)-2|=|-5|=5$$

(例終)

練習 217 数直線上の次の２点間の距離を求めよ。
(1)　A(−3)，B(2)　　　(2)　P(−2)，Q(−1)

２点間の距離の性質を挙げましょう。

定理 (距離の性質)　２点間の距離 $d(A,\ B)$ について次が成り立つ。
（１）$d(A,\ B)\geqq 0$　　特に　$d(A,\ B)=0 \iff A=B$
（２）$d(A,\ B)=d(B,\ A)$
（３）$d(A,\ B)\leqq d(A,\ C)+d(C,\ B)$ (三角不等式)　　**三角不等式**

証明　A(a)，B(b) とする。
（１）$d(A,\ B)=|b-a|$ であり，絶対値は必ず０以上。よって $d(A,\ B)\geqq 0$。
また

$$\begin{aligned} d(A,\ B)=0 &\iff |b-a|=0 \\ &\iff b-a=0 \\ &\iff b=a \\ &\iff A=B \end{aligned}$$

よって，$d(A,\ B)=0 \iff A=B$
（２）$|a|=|-a|$ より，

$$d(A,\ B)=|b-a|=|-(a-b)|=|a-b|=d(B,\ A)$$

（3） $|a+b| \leqq |a|+|b|$ より，

$$d(A,\ B)=|b-a|=|(b-c)+(c-a)| \leqq |b-c|+|c-a|=d(A,\ C)+d(C,\ B)$$

(証明終)

注意　(1) の性質は，距離なら当然成り立つはずのものですが，それを確認したわけである。

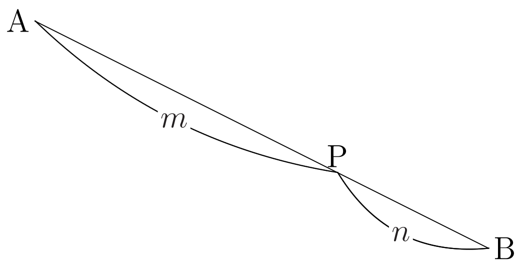
また (2) は，先の「どこからどこまでの距離」という定義から考えれば,「A から B までの距離」と「B から A までの距離」は同じであるから，これも当然成り立っているはず。その確認である。

(3) の証明では絶対値の性質 $|a+b| \leqq |a|+|b|$ を使っていることに注意してほしい。この性質 $|a+b| \leqq |a|+|b|$ にも「三角不等式」という名前がついていました。なぜこの名前がつけられたのかは，式の意味を現実に即して解釈すれば理解できよう。実際この式の意味は,「点 C に寄り道する $(d(A,\ C)+d(C,\ B))$ より，直接行った方 $(d(A,\ B))$ が近い $(\leqq)$」というものです。これは日常の直観そのものですね。 **(注意終)**

内分点・外分点

内分点　次に線分を分ける点について説明しましょう。まずは「内分点」から。

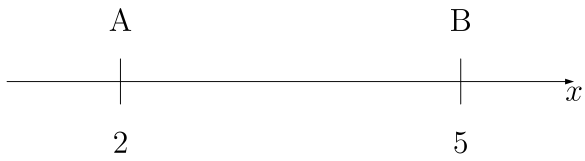
定義 (内分する)　点 P が，線分 AB 上にあって，AP : PB $= m : n$ であるとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に **内分する** ，あるいは点 P は線分 AB を $m : n$ の比に **内分する点** である，という。ただし，$m > 0,\ n > 0$ とする。 **(定義終)** **内分する**



注意　この定義には座標は関係していないことに注意してほしい。以下でこの定義と座標を関連付けていきます。 **(注意終)**

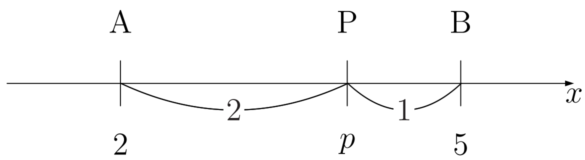
さて，数直線上の点を考えましょう。

例　下の図のように 2 点 A，B を考えよう。



このとき線分 AB を 2：1 の比に内分する点の座標は 4 になる。
また 1：2 の比に内分する点の座標は 3 になる。
比の順序が変わると，点が異なることに注意。 **(例終)**

さて，上の例では 4 とか 3 とか，簡単に書きましたが，どうやって求めたらよいでしょう。
以下それを説明しましょう。
例として線分 AB を 2：1 の比に内分する点を求めます。求める点を P，その座標を p とします。



内分点の定義より，AP：PB $= 2 : 1$ 。また AP $= |p-2|$，PB$= |5-p|$ ですから，

$$|p-2| : |5-p| = 2 : 1$$

「内項の積は外項の積に等しい」[2] ので

$$1 \times |p-2| = 2 \times |5-p|$$

[2] これは次のような意味です。
比 $a : b = x : y$ に対して，b と x を「内項」，a と y を「外項」といいます。つまり「内項の積は外項の積に等しい」とは，内項どうしの積 bx と外項どうしの積 ay が等しいということ，つまり

$$bx = ay$$

ということです。
証明 $a : b = x : y$ とすると，比の値 $\frac{a}{b}$，$\frac{x}{y}$ が等しい。つまり

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

分母を払うと，

$$bx = ay$$

を得る。 **(証明終)**

ここで $2<p<5$ に注意すれば，$|p-2|=p-2,\ |5-p|=5-p$ なので，

$$p-2=2(5-p)$$

これを解くと，$p=4$ を得ます。

問 117 上と同様にして， 1：2 の比に内分する点の座標を求めよ。

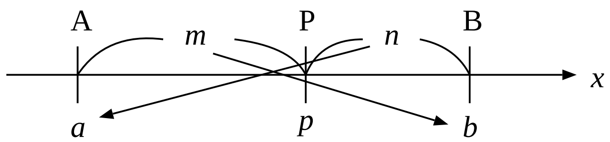
以上のことを一般化すると次の定理を得ます。

定理 (内分点の座標) 数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標 p は

$$p=\frac{na+mb}{m+n}$$

で計算できる。

注意 定理で与えられている式の分子 $na+mb$ の $a,\ b,\ m,\ n$ の順番に注意してほしい。
線分「AB」と比 「$m:n$」に対して,「na と mb」 です。図にしてみると，かけあわせる数がクロスしていることがわかります。この図を一緒に頭に入れると間違えることは少なくなるでしょう。



(注意終)

証明 (I) $a<b$ の場合。
$a<p<b$ なので，

$$\mathrm{AP}=p-a,\quad \mathrm{PB}=b-p$$

である。
また，AP：PB $=m:n$ より，

$$(p-a):(b-p)=m:n$$

内項の積は外項の積に等しいので，

$$m(b-p)=n(p-a)$$

これを p に関して解くと，

$$p=\frac{na+mb}{m+n}$$

問 118 $a>b$ の場合の証明を書き下せ。

以上から，いずれの場合も

$$p = \frac{na+mb}{m+n}$$

(証明終)

中点は線分 AB を 1：1 に内分する点なので，次の結果を得ます。

系 (中点の座標)　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) の中点 M の座標 m は

$$m = \frac{a+b}{2}$$

例　2 点 A(-1)，B(4) に対して，線分 AB を 2：3 に内分する点 P の座標 p は

$$\begin{aligned} p &= \frac{3\times(-1)+2\times 4}{2+3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって P(1) である。
また中点 M の座標 m は

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1+4}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

より，$\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}\right)$。 **(例終)**

練習 218 2 点 A(-2)，B(-9) に対して，次の点の座標を求めよ。
(1) 線分 AB を 3：4 に内分する点　　(2) 線分 AB の中点

外分点

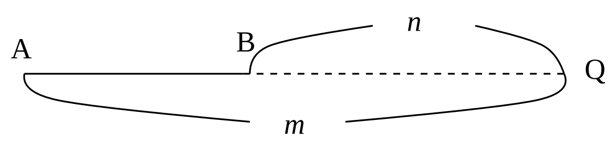
定義 (外分する点)　点 Q が，線分 AB の延長線上にあって，AQ：QB $= m : n$ であるとき，点 Q は線分 AB を $m : n$ に **外分する** ，あるいは点 Q は線分 AB を $m : n$ の比に **外分する点** である，という。 **外分する**
ただし，$m > 0$, $n > 0$ かつ $m \neq n$ とする。 **(定義終)**

注意
(1) 外分点は線分 AB の「延長線上」にあることに注意。
(2) もし $m = n$ だったらどうなるか，考えてみよ。

(注意終)

線分 AB は A の側，B の側の二つの方向に延長が可能です。どちらの方に外分点があるのかは，m, n の大小によって変わります。これについて説明しましょう。

定義の中で触れているように $m \neq n$ なので，m と n の大小関係は $m < n$ と $m > n$ のいずれかです。
まず $m > n$ の場合を考えましょう。
外分点を Q とし，AQ：QB $= m : n$ とすると，AQ の方が QB より大きい。
つまり Q は線分 AB の延長線上で，A から遠いところにあります。これを図にすると下のようになります。



一方 $m < n$ のときは，逆に B から遠い方の延長線上に点 Q があることになります。

問 119 上のような図を描いてみよ。

以上のことと，内分点の座標を求めたときの方法を真似すれば，次の定理が得られます (意欲ある読者は，次の定理を見る前に外分点がどのような計算で与えられるか，また，その証明を自分で書いてみよ)。

定理 (外分点の座標)　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 Q の座標 q は

$$q = \frac{-na + mb}{m - n}$$

で計算できる。

証明　(I) $a < b$ で $m > n$ のとき。
点 Q は，B に近い方にあるので，$a < b < q$。よって

$$(q - a) : (q - b) = m : n$$

ゆえに

$$m(q - b) = n(q - a)$$

これを q について解けば

$$q = \frac{-na + mb}{m - n}$$

を得る。

問 120 今度は残り 3 通りの場合がある。(II) $a<b$ で $m<n$ の場合，(III) $a>b$ で $m>n$ の場合，(IV) $a>b$ で $m<n$ の場合である。これらについていずれの場合も

$$q=\frac{-na+mb}{m-n}$$

となることを証明せよ。

(I) 〜 (IV) によって，

$$q=\frac{-na+mb}{m-n}$$

(証明終)

例 2 点 A(2)，B(8) に対して，線分 AB を 4：3 に外分する点 Q の座標 q は，

$$\begin{aligned} q &= \frac{-3\times 2+4\times 8}{4-3} \\ &= 26 \end{aligned}$$

よって Q(26) である。 **(例終)**

練習 219 2 点 A(−2)，B(4) に対して，次の点の座標を求めよ。
(1) 線分 AB を 5：3 に外分する点。 (2) 線分 AB を 1：4 に外分する点。

少し横道にそれますが，ちょっと面白い見方があるので紹介しておきましょう。
上に外分点の座標の公式

$$q=\frac{-na+mb}{m-n}$$

を与えましたが，これを

$$q=\frac{(-n)a+mb}{m+(-n)}$$

と見てみましょう。すると，内分点の公式を逆に見れば，これは線分 AB を $m:(-n)$ に内分する点である，と考えることができます。

しかし外分点の定義に $m>0,\ n>0$ という条件があるので，$-n<0$。そして内分点の定義を見ると，ここにも $m>0,\ n>0$ という条件があるので,「線分 AB を $m:(-n)$ に内分する点」というのは本来まずいのですが，内分と外分という，一見異なる考え方が，式から統一的に解釈できるのはちょっと面白いことですね。

それを推(お)し進めることで，次のように定義することもできます。

定義 (分点) 点 P が，直線 AB 上にあって，AP：PB $=m:n$ であるとき，点 P は線分 AB を $m:n$ に **分ける**，あるいは点 P は線分 AB を $m:n$ の比に **分ける点** である，という。 **分ける** **(定義終)**

点 P が「直線」AB 上にあること，$m,\ n$ に符号の条件がついていないことに注意してほしい。言い替えると，m と n が同符号のときには内分点となり，異符号のときには外分点となります。
実際，次の定理が成り立ちます。

定理 (分点の座標)　点 P(p) が，線分 AB を $m:n$ に分けるとき，

$$p = \frac{na + mb}{m+n}$$

問 121 これを証明せよ。

また $m > 0,\ n > 0$ とするとき，$m : (-n)$ に分ける点と $(-m) : n$ に分ける点は一致します。

問 122 これを確かめよ。

21.1.2　平面上の点

ここまでの節で，座標と図形的な考え方の対応に少し慣れてきたでしょうか?
この節では，数直線上で与えた考え方を平面上のものへ拡張します。

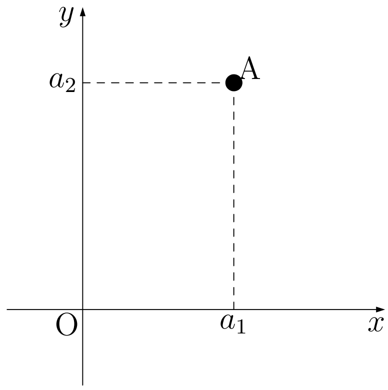
平面上の点の座標

平面上の座標　中学校でじゃっかん学習し，本書でも関数のところで解説しましたが，平面上に直交する 2 本の数直線を考えると，平面上の点 A と数の組 $(a_1,\ a_2)$ が過不足なく対応します[3]。

定義 (座標，座標平面，原点，x 座標，y 座標)　平面内に直交する 2 本の数直線を与える。このとき平面上の点 A に対応する数の組 $(a_1,\ a_2)$ を，点 A の **座標** といい，A$(a_1,\ a_2)$ と表す。座標を考えた平面を **座標平面** という。
また座標が $(0,\ 0)$ の点を **原点** という。
さらに横軸を x **軸**，縦軸を y **軸**，座標の $(a_1,\ a_2)$ において a_1 を x **座標**，a_2 を y **座標** という。 **(定義終)**

座標
座標平面
原点
x **軸**
y **軸**
x **座標**
y **座標**

[3] もちろん 2 本の数直線は，それぞれの原点で交わらせるものとします。



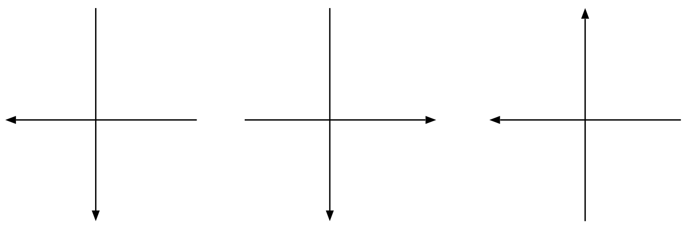
注意　ここでは 2 本の数直線を「直交」させましたが，斜めに交わらせたものを考えて議論することもできます。これを「斜交座標」といいますが，これについては大学で扱われることになるでしょう (斜交座標と対置して考える場合，我々が通常使っている座標を「直交座標」ということがあります)。 **(注意終)**

斜交座標　**直交座標**

右手系と左手系 (ここはとばしてもよい)　上では何気なく 2 本の数直線を交わらせた図を描いておきましたが，これにはちょっと問題があります。気がつかなければ気がつかないで問題にはならないのですが，気がついている人もいるかもしれないので触れておきましょう。

もう一度図をよく見てください。x 軸には右向きの，y 軸には上向きの矢印がついています。これは数が x 軸では左から右へ，y 軸では下から上へ，増えていることを示しています。

よく考えると，なぜこのように決まっているのか，理由がわからないことでしょう。実際，理論的にはこれ以外に下のように三つの場合が考えられます。

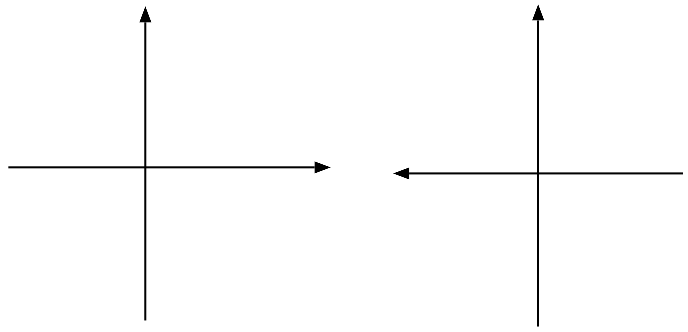


これらの図をさらによく見ると，一番左の図は原点を中心に回転させると，これまで我々があたりまえに使ってきたものに重なります。

また，上の中央の図も原点を中心に回転させると右の図に重なります。

ということは理論的に下の二つの場合が残ります。左の図を「右手系」，右の図を「左手系」といいます。

右手系　**左手系**



右手系　　左手系

これら二つは，鏡をまんなかにおけば，つまり左の図を鏡で映(うつ)すと右の図になり，右の図を鏡で映すと左の図になります (鏡で映すことを数学では「鏡映(きょうえい)」するといいます)。 **鏡映**

数学にはこれらの二つを区別する立場と，区別しない立場の両方の理論があります[4]。

そしてここでは区別する立場で議論することにします。

結局，座標は本質的には2通りあることになります。

すると次には，我々はここまで当り前のように，x 軸には右向きの，y 軸には上向きの矢印がついている図で議論してきましたが，本当にこれでよかったのだろうか，という疑問が湧きます。

可能ならこれから後の議論をこれを検討しながら読んでほしいのですが，実はどちらの座標で議論をしても，ほとんど問題ないことがわかります。しかしそのためにはきちんとした「翻訳」が必要となります。

そこで面倒を避けるために，ここではじめに使った座標，右手系で統一して議論するのです。

2点間の距離

ここからしばらくは，数直線と同様のストーリーで話を進めて行きます。意欲のある読者は，先を読む前に，数直線での結果が平面の場合はどのようになっていくのか，自分で考えてみてほしい。

定義 (平面上の2点間の距離)　平面上の2点 A，B の距離 d を

$$d = d(A,\ B) = \mathrm{AB}$$

と定義する。ここで AB は線分 AB の長さである。 **(定義終)**

座標平面上の2点の間の距離は，次のようにして計算できます。

定理 (2点間の距離)　2点 $\mathrm{A}(a_1,\ b_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ の間の距離 d は

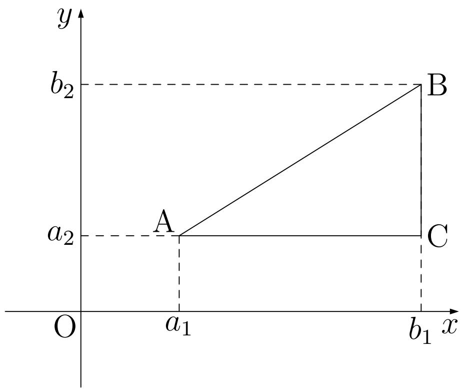
$$d = d(A,\ B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

[4]区別する立場は鏡の内と外を違うものと考える，区別しない立場は同じものと考える，とでもいったらいいでしょうか。

特に，原点と点 A との距離 d は

$$d = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

証明　A を通り x 軸に平行な直線と，B を通り y 軸に平行な直線との交点を C とする。



このとき，△ABC は ∠C $= 90^\circ$ の直角三角形である。よってピタゴラスの定理 (三平方の定理) より，

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$$

よって

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2}$$

一方

$$\mathrm{AC} = |b_1 - a_1|, \quad \mathrm{BC} = |b_2 - a_2|$$

$|a|^2 = a^2$ に注意しながら，これを上の式に代入すれば

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

を得る。

また B が原点 O(0, 0) の場合を考えれば，原点と点 A との距離

$$\mathrm{OA} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

を得る。　**(証明終)**

注意　A と B がともに x 軸上にある場合，2 点の座標はそれぞれ A(a_1, 0)，B(b_1, 0) と表せるので，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (0 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2} \end{aligned}$$

$\sqrt{a^2} = |a|$ であったことに注意すると，結局

$$\mathrm{AB} = |b_1 - a_1|$$

となり，数直線上で考えた距離の公式に一致します。

つまり上に与えた座標平面上での距離の公式は，数直線上での距離の公式の拡張になっています。 **(注意終)**

例　2点 A(1, 4)，B(4, −2) 間の距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(4-1)^2 + (-2-4)^2} \\ &= \sqrt{9+36} \\ &= \sqrt{45} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

(例終)

例　2点 O と A(−4, −3) 間の距離 d は

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

(例終)

練習 220 次の2点間の距離を求めよ。

(1) A(2, 5)，B(−4, 4)　　(2) A(−1, −3)，原点 O

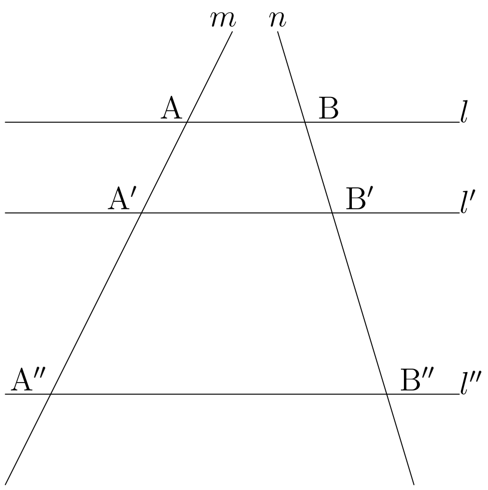
線分の内分点・外分点

内分点　平面上の2点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ に対して，線分 AB を $m : n$ に内分する点 P$(p_1,\ p_2)$ の座標を求めましょう。

このために次の定理を用います。

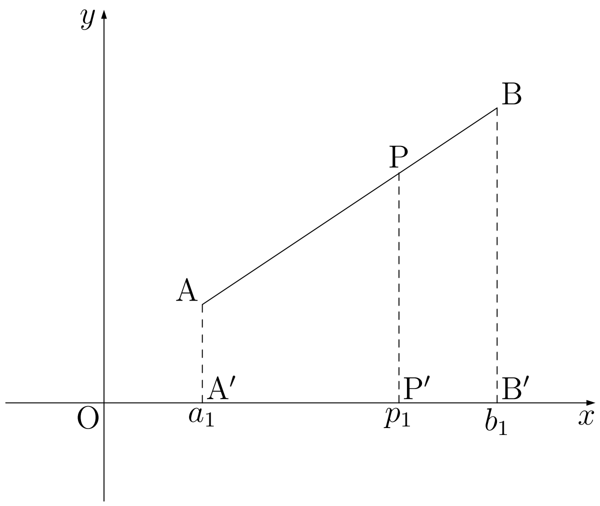
定理 (平行線の性質)　平行な3直線 $l,\ l',\ l''$ に2本の直線 $m,\ n$ が図のように交わっている。このとき

$$\mathrm{AA'} : \mathrm{A'A''} = \mathrm{BB'} : \mathrm{B'B''}$$



この定理は中学校で学習したと思います。しかし証明は見たことがないでしょう。念のために補講につけておくので，興味のある人は，参考にしてください。

さて，平面上の内分点の公式を導きましょう。
下の図を見てほしい。



点 P が，線分 AB を $m:n$ に内分しているとします。つまり $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ であるとすると，先の定理から $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{A'P'}:\mathrm{P'B'}$ であることがわかります。言い替えれば，P′ は線分 A′B′ を $m:n$ に内分しています。
よって前節の結果から，

$$p_1=\frac{na_1+mb_1}{m+n}$$

を得ます。
次に A，P，B から y 軸に垂線を下ろして，同様に考えれば，

$$p_2=\frac{na_2+mb_2}{m+n}$$

を得ます。

問 123 実際に図を描き，これを確かめよ。

以上から次の定理が得らます。

定理 (内分点の座標)　A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標は

$$\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n}\right)$$

特に中点 M の座標は,

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

例　2 点 A$(2,\ 5)$，B$(-2,\ 3)$ について，線分 AB を $2:3$ に内分する点の座標は,

$$x \text{ 座標 }:\ \frac{3\times 2+2\times(-2)}{2+3}=\frac{2}{5},\qquad y \text{ 座標 }:\ \frac{3\times 5+2\times 3}{2+3}=\frac{21}{5}$$

よって $\left(\frac{2}{5},\ \frac{21}{5}\right)$。

また中点の座標は,

$$x \text{ 座標 }:\ \frac{2+(-2)}{2}=0,\qquad y \text{ 座標 }:\ \frac{5+3}{2}=4$$

よって $(0,\ 4)$。 **(例終)**

練習 221 2 点 A$(-2,\ -3)$，B$(4,\ 1)$ に対して，次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を 1：3 に内分する点　　(2) 線分 AB の中点

外分点　先の内分点の公式からわかるように，要は，数直線の場合の公式を繰り返し使えばよいのです。よって次の結果の成り立つことが，容易に想像できるでしょう。

定理 (外分点の座標)　A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の座標は

$$\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n}\right)$$

問 124 これを証明せよ。

練習 222 2 点 A$(-2,\ -3)$，B$(4,\ 1)$ に対して，線分 AB を 1：3 に外分する点の座標を求めよ。

中線定理・三角形の重心

ここまでで一応話は一段落です。練習を兼ねて二つほど例題を与えましょう。

また，ここに紹介した例題は，解答例まで含めて記憶にとどめておくことをお勧めします。

中線定理　次の例題を **中線定理** といいます。ここで **中線** とは，三角形の辺の中点と向かい側の頂点を結ぶ線のことです。つまり解答例のところで示した図の，AM のような線分のことです。 **中線定理** **中線**

例題 82 △ABC の辺 BC の中点を M とするとき

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

が成り立つことを証明せよ。

解説　中学校のときに，この定理に出会っているでしょうか?　式さえ知っていれば，中学校レベルの知識で証明が可能ですが，それはみなさんの自習に任せ，ここでは座標を用いた証明法を紹介しましょう。

ぜひ証明を見比べ，座標を用いた方法の簡便さを感じとってほしい。

さて，どうやって証明しましょうか。

△ABC は座標平面のどこにあるかわかりません。いや，むしろ，どこにあっても通用するような証明をすべきです。

そのように考えると，3 点の座標を $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$ とし，M の座標，さらに AB^2 などを計算して等式が成り立つことを示せばよさそうなことが想像できます。

座標を使った証明に慣れてもらうために，ぜひこの方針で計算し，証明を与えてみてほしいのですが，すぐにわかるように，これは計算がかなり大変です。

問 125 それでも実際に計算してみよ。

そこでもう少し計算が楽にならないかどうかを考えます。

上の計算を実行した人はわかるでしょうが，中点の座標は分数であり，ここから計算の面倒さが生じています。そこで，中点を原点にとりましょう。このようにとると，B と C は原点に対して対称な位置にきます。

さらに辺 BC を一方の軸上にとると，座標が 0 になる部分が現れ，さらに計算が楽になります。

解答例のはじめの部分はこれから決まる記号類を設定しているのです。

しかしこんなことをやっていいのでしょうか?

証明すべき式は

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

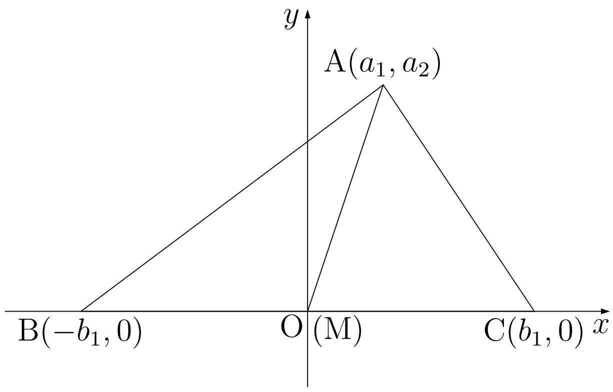
で，線分の長さ以外は出てきません。

一方一般の位置にある△ABC を平行移動，回転をすることで，上のような位置に移動することが可能です。言い替えると，元の位置にあった三角形と，上にような位置に移動した三角形は合同です。

そして，合同な図形の線分の長さは変わらないので，このようなことをしてよいことが結論できるわけです。

以上の議論は考えている図形がどんなものであっても成立します。よって，はじめから計算しやすいような位置におき，記号類を設定してもかまわないのです。

解答例　図のように，直線 BC を x 軸，M を通り BC に垂直な直線を y 軸にとる。さらに頂点を $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(-b_1,\ 0)$ とすると，$\mathrm{C}(b_1,\ 0)$ と表すことができる。



このとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 &= \{(a_1+b_1)^2+{a_2}^2\}+\{(a_1-b_1)^2+{a_2}^2\}\\ &= 2({a_1}^2+{b_1}^2+{a_2}^2)\end{aligned}$$

一方 $\mathrm{AM}^2={a_1}^2+{a_2}^2,\ \mathrm{BM}^2={b_1}^2$ より

$$2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)=2({a_1}^2+{a_2}^2+{b_1}^2)$$

ゆえに

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

(解答例終)

上の結果は次のように一般化できます。

練習 223 △ABC の辺 BC を 1：2 に内分する点を D とするとき，

$$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2)$$

が成り立つことを証明せよ。

問 126 上の結果はさらに D が $m:n$ に内分するという仮定まで一般化できる。どんな式が成り立つのかを予想し，証明せよ。

三角形の重心　第14章「平面図形の性質」で重心について解説しました。それは次のような性質でした。

定理 (重心)　三角形の3本の中線は1点で交わる。
　またこの交点は中線を 2：1 に内分する。

定義 (重心)　この交点を三角形の **重心** という。 **(定義終)**　**重心**

　さて，上で示した重心の性質を利用すると三角形の重心の座標を計算することができます。

定理 (三角形の重心の座標)　3点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$ を頂点にもつ△ABC の重心 G の座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

で計算できる。

注意　線分 AB の中点の座標は，それぞれの座標の平均でした。
　三角形の重心の座標も，それぞれの座標の平均になっています。
　これは面白い事実です。これを元に考えれば，三角錐（すい）の重心の座標が類推できるでしょう。それは正しいでしょうか? [5] **(注意終)**

証明　△ABC の辺 BC の中点を M とすると，重心 G は AM を 2：1 に内分する。
　さて，

$$\mathrm{M}\left(\frac{b_1+c_1}{2},\ \frac{b_2+c_2}{2}\right)$$

　よって

$$\mathrm{G}\ \text{の}\ x\ \text{座標：}\quad \frac{1\times a_1+2\times\dfrac{b_1+c_1}{2}}{2+1}=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}$$

　y 座標についても同様。

問 127　確かめよ。

[5] その前に，空間図形をどのように座標で表すのかを考えなければなりません。後の章で扱う予定なので，それまでに考えてみてほしい。

ゆえに

$$\mathrm{G}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

(証明終)

注意　先の中線定理を証明するときには，図の位置をどこにおくかに大分頭をしぼったにもかかわらず，今回はまったくそういったことをしませんでした。

これは定理自体が一般的な形であること，また，それによって重心の座標が頂点の座標の平均になっているという対称性を示し美しい，ということからこのままの形で示しました。 **(注意終)**

例　3 点 A(0, 6)，B(6, −2)，C(9, 5) を頂点とする △ABC の重心 G の座標は

$$x\ 座標 : \frac{0+6+9}{3}=5,\quad y\ 座標 : \frac{6-2+5}{3}=3$$

よって G(5, 3)。 **(例終)**

練習 224 3 点 A(2, 8)，B(−3, −2)，C(7, 3) を頂点とする △ABC の重心 G の座標を求めよ。

例題 83 △ABC の辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ L，M，N とする。このとき △ABC と △LMN の重心は一致することを証明せよ。

解説　内分点の計算の復習的な問題です。つまりひたすら計算すればよい。

解答例　A(a_1, a_2)，B(b_1, b_2)，C(c_1, c_2) とすると，△ABC の重心 G の座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

一方，

$$\mathrm{L}\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2}\right),\ \mathrm{M}\left(\frac{b_1+c_1}{2},\ \frac{b_2+c_2}{2}\right),\ \mathrm{N}\left(\frac{c_1+a_1}{2},\ \frac{c_2+a_2}{2}\right)$$

なので，△LMN の重心 G′ の座標は

$$x\ 座標：\ \frac{\frac{a_1+b_1}{2}+\frac{b_1+c_1}{2}+\frac{c_1+a_1}{2}}{3}=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}$$

y 座標についても同様。よって

$$\mathrm{G}'\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

ゆえに △ABC の重心と △LMN の重心は一致する。 **(解答例終)**

練習 225 △ABC の辺 AB，BC，CA を $m:n$ に内分する点をそれぞれ L，M，N とする。このとき △ABC と △LMN の重心は一致することを証明せよ。

21.2　直線

第 8 章「1 次方程式の復習」において，次の定理を証明しました (逆の証明は読者のみなさんにおまかせしました)。

定理 (直線の方程式)　1 次方程式 **直線の方程式**

$$ax+by+c=0 \quad (a,\ b \text{ は同時には } 0 \text{ にならない})$$

は平面上の直線を表す。逆に，どんな平面上の直線も，上の形の 1 次方程式で表すことができる。

この意味では，直線の方程式に関する話は一段落しています。
そこで，ここではその結果得られるいくつかの図形的な事実を紹介します。

21.2.1　直線の方程式の決定

中学校のときに学習した直線の性質の一つに，

2 点を通る直線は 1 本しかない

というものがあったのを覚えているでしょう。
もし学習していなかったとしても，模造紙などに直線を引くときに，端から一定のところにある点を 2 点とればその 2 点に定規をあてることで，1 本の直線が引ける，という経験をしていると思います。この経験を数学としてきちんと記述したのが，上の事実です。
この事実を座標平面上で解釈すると次のことが予想できます。

予想　異なる 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ が与えられれば，直線の方程式 $ax+by+c=0$ をただ一つ決定することができる。

つまり，具体的に 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ が与えられれば，直線の方程式 $ax+by+c=0$ の三つの係数 $a,\ b,\ c$ を計算で求めることができる，ということです。
これは厳密に成り立つ「定理」ですが，その証明はちょっと難しい。これは意欲のある読者におまかせすることにして，ここでは具体的な例でその感じを見てもらうだけにとどめることにしましょう。

例　2 点 $\mathrm{A}(2,\ -1)$, $\mathrm{B}(6,\ 7)$ を考えます。求めるべきは方程式 $ax+by+c=0$ の三つの係数 $a,\ b,\ c$ です。

当然のことながら，上の 2 点 A，B は直線上にあるので，この 1 次方程式を満たしています。つまり，まず点 A(2, −1) を通ることから，x に 2 を，y に −1 を代入したものが成り立ちます。代入すると，

$$2a - b + c = 0 \ \cdots (1)$$

B(6, 7) についても同様なので，

$$6a + 7b + c = 0 \ \cdots (2)$$

を得ます。

求めるべきものが $a,\ b,\ c$ の三つであるのに対して，方程式が二つしかないので，厳密には解くことができません。しかし，これらの「比」は求めることができ，今の場合はそれで十分です。

では実際に「比」を求めてみましょう。といってもそんなに変わったことをするわけではありません。まずは加減法で一つの文字を消します。

(1) を 3 倍すると，a を消去することができます。つまり，(2) − (1) × 3 を計算すると，

$$10b - 2c = 0$$

これは c について解くことができます。実行すると，

$$c = 5b$$

これを (1) に代入して，c を消去すると，

$$2a - b + 5b = 0$$

これは a について解くことができ，

$$a = -2b$$

を得ます。

以上の結果から $a : b : c = -2b : b : 5b = -2 : 1 : 5$ となり,「比」が求まりました。

これは方程式を求めることに関しては寄り道なので，先を急ぎましょう。

今得られた $a = -2b,\ c = 5b$ を元の 1 次方程式に代入すると，

$$-2bx + by + 5b = 0 \ \cdots (3)$$

となります。

ここで，もし $b = 0$ なら，$a = -2b$ でしたから $a = 0$ となり，直線の方程式の条件「$a,\ b$ は同時に 0 にはならない」に反します。よって $b \neq 0$ としてよい。

そこで (3) の両辺を b で割ると，

$$-2x + y + 5 = 0$$

となり，方程式が求められました。 **(例終)**

注意　読者の中には，なぜ「比」が求まれば，方程式が求められるのか不審に思っている人がいるかもしれません。

しかし思い出してください。方程式は 0 でない定数を両辺にかけても同値でした。

すなわち定数だけかけても割っても，直線を表す方程式としては同じなのです。

一方「比」もすべてを定数倍したものは等しい。

上の例のような方法によって $a,\ b,\ c$ を求められるのは，このような理由によるものなのです。 **(注意終)**

練習 226 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) A$(1,\ -2)$, B$(-1,\ 1)$　　(2) A$(2,\ 0)$, B$(-3,\ -5)$

さて，以上は一般的な位置にある 2 点の場合です。次に少し特殊な位置にある 2 点の場合を紹介しておきましょう。

例　2 点 A$(2,\ 1)$ と B$(-3,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めてみよう。2 点を座標平面上にとってみればすぐにわかるように，この直線は x 軸に平行です。つまり $y=$ (定数) の形になるはずです (それどころか $y=1$ であることが，すぐにわかるだろう。これを確かめましょう)。

求める式を $ax+by+c=0$ とします。まず A$(2,\ 1)$ を通るので，

$$2a+b+c=0\ \cdots(1)$$

また B$(-3,\ 1)$ を通るので，

$$-3a+b+c=0\ \cdots(2)$$

ここで (1) − (2) を計算すると，b と c がいっぺんに消去でき，$a=0$ を得ます。(1) に代入して $b=-c$ を得ます。

元の方程式に代入して，

$$-cy+c=0\ \cdots(3)$$

ここで $c=0$ とすると $b=0$ となり，直線の方程式の条件に反する。よって $c\neq 0$。

(3) の両辺を c で割ると，

$$-y+1=0$$

これは $y=1$ と同値です。 **(例終)**

練習 227 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) A$(3,\ -2)$, B$(100,\ -2)$　　(2) A$(-3,\ 4)$, B$(-3,\ -2)$

問 128 (この問いはかなり難しい)
以上の具体例を踏まえて，異なる 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ が与えられれば，直線の方程式 $ax + by + c = 0$ をただ一つ決定することができる，ことを証明せよ。

直線の方程式を決める方法は他にもあります。
第 8 章で紹介したように，たとえば直線の傾き m と 1 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ の座標が与えられていたら，1 次関数の式が決まります。
実際，次のようにすればよい。
この直線の y 切片を n とすると，求める式は

$$y = mx + n$$

となります。今 m は与えられているので，n の値が m や $a_1,\ a_2$ によって計算できればいいわけです。これは次の計算から求められることがわかります。
上の 1 次関数のグラフが点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ を通るので，

$$a_2 = ma_1 + n$$

よって

$$n = a_2 - ma_1$$

元の式に代入すると，

$$y = mx + a_2 - ma_1$$

よって式が定まる。

通常は，式の対称性を考えて次の形で定理を表現します。

定理 (直線の方程式の決定)　点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

例　点 $(2, 1)$ を通り，傾き 2 の直線の方程式は，

$$y - 1 = 2(x - 2)$$

展開して整理すると，

$$y = 2x - 3$$

(例終)

練習 228 点 $(-2,\ 3)$ を通り，次の傾きをもつ直線の方程式を求めよ。
(1) 傾き $\dfrac{1}{3}$　　(2) 傾き -1　　(3) 傾き 0

第 8 章で紹介したように，次の定理も成り立ちました。

定理 (1 次関数の特徴づけ)　関数が 1 次関数であるための必要十分条件は変化の割合が常に一定であることである。

この定理を使えば，次のようにして定理「直線の方程式の決定」の別証明が得られます。

定理「直線の方程式の決定」の別証明　1 次関数の変化の割合は一定で，これは傾きに等しい。直線上の任意の点を $(x,\ y)$ とすると，この点が A と異なる限り，

$$m = \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

分母を払えば，定理の結論の式を得る。そして定理の式は，$(x,\ y)$ が点 A の場合にも成り立っている。(証明終)

定理「直線の方程式の決定」を用いれば，次の結果も得られます。

系 (直線の方程式の決定)　2 点 $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$ を通る直線の方程式は，

$$\begin{aligned} &a_1 \neq b_1 \text{ のとき，} \quad && y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) \\ &a_1 = b_1 \text{ のとき，} \quad && x = a_1 \end{aligned}$$

証明は，2 点を通る直線の傾きが，$\dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ に等しいことから明らかでしょう。

定理の使い方を，例で示しましょう。

例　2 点 $(1,\ -3)$, $(3,\ 1)$ を通る直線の方程式は，

$$y - (-3) = \frac{1 - (-3)}{3 - 1}(x - 1)$$

これを整理すれば，

$$y = 2x - 5$$

を得る。**(例終)**

注意　上では点が提示された順番に $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$ とみて，つまり $a_1 = 1,\ a_2 = -3,\ b_1 = 3,\ b_2 = 1$ として定理を適用したが，この順番にこだわる必要はない。**(注意終)**

問 129 上の例の点の順番を入れ換えて定理を適用し，方程式を求めてみよ。上の例の結果と一致するか?

例　2点 $(2,\ -1),\ (2,\ 4)$ を通る直線は，この2点の x 座標が同じなので，

$$x = 2$$

(例終)

練習 229 次の2点を通る直線の方程式を求めよ。

(1) $(1,\ 4),\ (4,\ 7)$　　(2) $(-2,\ 1),\ (1,\ -1)$

(3) $(-1,\ 4),\ (-1,\ 0)$　　(4) $(7,\ 3),\ (-11,\ 3)$

21.2.2　2直線の位置関係——平行条件

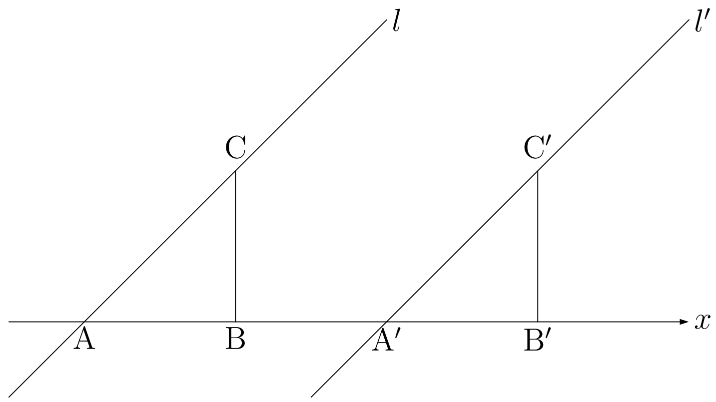
表題のことについては，第8章で触れています。そこにあるように，2直線の位置関係は「交わる」,「平行」,「一致」のいずれかでした。

これらのうち,「平行」と「一致」については次の定理が成り立ちます。以下簡単のために,「一致」は「平行」に含めて考えることにします。

定理 (平行条件)　2直線 $y = mx + n,\ y = m'x + n'$ が平行であるための必要十分条件は　**平行条件**

$$m = m'$$

証明　下の図のように記号を定める (線分 BC と B′C′ は x 軸に垂直で，AB=A′B′ であるとする)。



l と l' が平行だとする。同位角は等しいので，∠CAB=∠C′A′B′ である。線分 BC と B′C′ は x 軸に垂直で，AB=A′B′ なので，△ABC と△A′B′C′ は合同である。

よって BC=B′C′。ゆえに，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{A'B'}}$$

つまり傾きは等しい。

逆に傾きが等しいとする。今 AB=A′B′ なので，BC=B′C′。さらに，線分 BC と B′C′ は x 軸に垂直なので，

$$\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'B'C'}$$

よって，$\angle$ CAB= $\angle$ C′A′B′。つまり同位角が等しいので l と l' は平行である。

(証明終)

注意　この定理は直線の方程式が 1 次関数の形，つまり $y = mx + n$ の形に書ける場合にのみ通用する。

一般の形 $ax + by + c = 0$ に通用する定理もある。それは次の通りである。

定理 (平行条件)　2 直線 $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ が平行であるための必要十分条件は　**平行条件**

$$ab' - a'b = 0$$

実際，2 直線が「平行」あるいは「一致」するということは，連立方程式 $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ が不定，あるいは不能ということだったので，この結論が得られます。

(注意終)

例題 84　点 (2, 1) を通り，直線 $3x - y + 1 = 0$ に平行な直線の方程式を求めよ。

解説　上の定理からわかるように，平行な 2 直線の傾きは等しい。そこで与えられている直線の方程式 $3x - y + 1 = 0$ を $y =$ の形に変形して傾きを求め，定理「直線の方程式の決定」 を適用すればよいことになります。

解答例　$3x - y + 1 = 0$ より，

$$y = 3x + 1$$

よって求める方程式は傾きが 3 で点 (2, 1) を通る。ゆえに

$$y - 1 = 3(x - 2)$$

展開して整理すると，

$$y = 3x - 5 \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 230　次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(-1,\ 2)$ を通り，直線 $y = -2x - 1$ に平行

(2) 点 $(-2,\ -1)$ を通り，直線 $2x + 3y - 1 = 0$ に平行

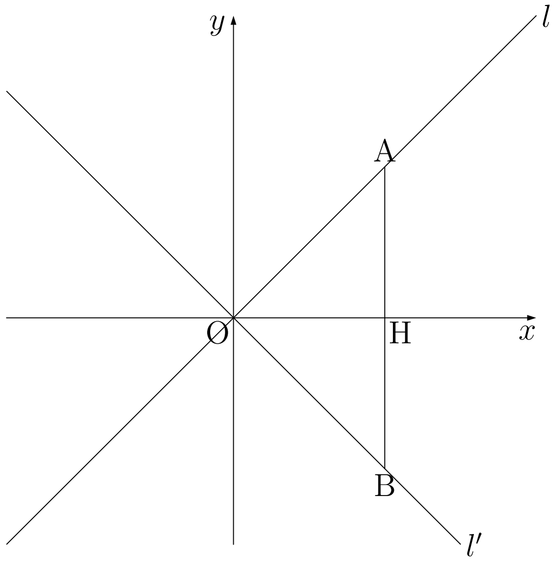
21.2.3　2直線の位置関係——垂直条件

「交わる」場合については，特に 2 直線が垂直であるときに興味があります。

定理 (垂直条件)　2 直線 $l : y = mx + n,\ l' : y = m'x + n'$ が垂直であるための必要十分条件は **垂直条件**

$$mm' = -1$$

証明　平行移動しても傾きは変わらないので，2 直線はいずれも原点を通るとしても一般性を失わない (定理「平行条件」) [6]。下の図のように記号を定める (線分 AB は x 軸に垂直，OH の長さを 1 とする)。



$l \perp l'$ とすると，∠ AOB$= 90°$。よってピタゴラスの定理より，

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2$$

△ AOH と△ BOH も直角三角形なので同様にして，

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{AH}^2$$
$$\mathrm{OB}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{BH}^2$$

これを上の式に代入して，

$$\mathrm{AB}^2 = 2\mathrm{OH}^2 + \mathrm{AH}^2 + \mathrm{BH}^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

[6]数学においてこのような議論の仕方がよく現れます。慣れてください。

ここではこのように考えてよい根拠として 定理「平行条件」を挙げていますが，いつでも著者が挙げてくれるとは限りません。こういった根拠を自分で挙げられるようになってほしい。

さて，

$$\begin{aligned} \mathrm{OH}=1,\ \mathrm{AH} &= m,\ \mathrm{BH}=-m' \\ \mathrm{AB} &= m-m' \end{aligned}$$

である[7]。

これらを (1) に代入すると，

$$(m-m')^2 = 2+m^2+(-m')^2$$

左辺を展開して整理すると，

$$-2mm' = 2$$

よって

$$mm' = -1$$

逆に

$$mm' = -1$$

とする。このとき，

$$\mathrm{AB}^2 = (m-m')^2 = 2+m^2+m'^2$$

一方

$$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2 = 2+m^2+(-m')^2 = 2+m^2+m'^2$$

よって

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2$$

ゆえにピタゴラスの定理の逆により，$\triangle$ AOB は $\angle$O を 90° とする直角三角形。

つまり $l \perp l'$。 **(証明終)**

注意　平行条件のときと同様に，この定理は直線の方程式が 1 次関数の形のときにのみ通用します。

一般の形 $ax+by+c=0$ に通用する定理もあり，それは次の通りです。

定理 (垂直条件)　2 直線 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$ が垂直であるための必要十分条件は **垂直条件**

$$aa'+bb'=0$$

証明は「どちらも座標軸に平行でない場合」と「いずれか一方が座標軸に平行の場合」にわけてすればよい (前者が上で証明した定理の場合になっている)。

あるいはベクトルを用いた方法もあります。これについては，大分後になるが，紹介することになるでしょう (証明はこちらの方が単純です)。 **(注意終)**

[7] $\mathrm{BH}=-m'$ であることに注意。
図の状況より，直線 l' の傾きは負。よって長さ BH を正にするためにマイナスの記号がついているのである。

例題 85 点 $(2,\ -1)$ を通り，直線 $x-3y+1=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

解説　与えられている直線の方程式を $y=$ の形に変形すれば，定理が適用できます。

解答例　$x-3y+1=0$ の傾きは $\dfrac{1}{3}$ なので，これに垂直な直線の傾き m は

$$m\times\frac{1}{3}=-1$$

より $m=-3$。

よって求める方程式は

$$y+1=-3(x-2)$$

展開して整理すると，

$$y=-3x+5\ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 231 次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。
(1) 点 $(2,\ -1)$ を通り，直線 $x-2y+1=0$ に垂直
(2) 点 $(-2,\ 3)$ を通り，直線 $2x+y+1=0$ に垂直
(3) 点 $(1,\ -3)$ を通り，直線 $3x-2y+1=0$ に垂直

21.2.4　図形への応用

ここまでで紹介した知識を，いくつかの図形の性質に応用してみせましょう。

垂直二等分線

例題 86 2 点 $\mathrm{A}(4,\ -5)$, $\mathrm{B}(2,\ -3)$ に対して，線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

解説　線分の垂直二等分線は，その線分の中点を通り，その線分に垂直な直線です。本例題の場合，まず線分 AB の中点の座標を求め，次に直線 AB の傾きを計算すれば，求める垂線の傾きが出せます。

解答例　線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{4+2}{2},\ \frac{-5-3}{2}\right)$$

より，$\mathrm{M}(3,\ -4)$。

また直線 AB の傾き m は,

$$m = \frac{-3+5}{2-4} = -1$$

よって垂直二等分線の傾きは 1。ゆえに求める方程式は

$$y + 4 = x - 3$$

より

$$y = x - 7 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 232 2 点 A(6, −3), B(−2, 7) とするとき，線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。

例題 87 直線 $2x - 5y - 16 = 0$ に関して，点 A(1, 3) と対称な点の座標を求めよ。

線対称

解説　2 点がある直線に関して対称であるとは，直線がその 2 点の垂直二等分線になっているときです。ここでは，この条件を読み替えていくことになります。

さて，先の例題でやったように，与えられた 2 点の垂直二等分線は，まず 2 点の中点の座標を通り，与えられた 2 点を通る直線に垂直なものであるということから求めることができました。

求める点を B$(x,\ y)$ とでもおきましょう。

するとまず線分 AB の中点を垂直二等分線は通っているので，これから $x,\ y$ に関する方程式が一つ得られます。

次に与えられた直線と直線 AB が垂直です。直線 AB の傾きは $x,\ y$ を用いて表すことができるので，これらのことからもう一つ方程式が得られます。

後はこれらを連立させて解けばよい。

解答例　求める点の座標を B$(x,\ y)$ とすると，線分 AB の中点が与えられた直線上にあるので,

$$2 \times \frac{x+1}{2} - 5 \times \frac{y+3}{2} - 16 = 0$$

分母を払うなどして整理すると,

$$2x - 5y = 45 \ \cdots (1)$$

与えられた直線の傾きは $\dfrac{2}{5}$ で，この直線と直線 AB は垂直に交わるので,

$$\frac{5}{2} \times \frac{y-3}{x-1} = -1$$

分母を払って整理すると,

$$5x+2y=11\ \cdots(2)$$

(1) と (2) を連立させて解くと,

$$x=5,\ y=-7\ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 233 直線 $x-y-2=0$ に関して，A$(-1,\ 1)$ と対称な点の座標を求めよ。

21.2.5 点と直線の距離

直線に関する話題の最後として，点と直線との距離を計算する公式を紹介しましょう。

そのためにまず点と直線との距離の定義を復習しておきましょう。

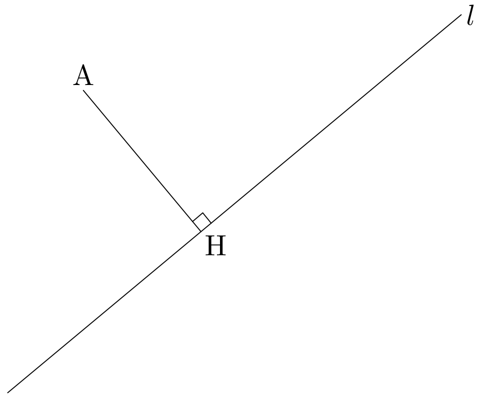
定義 (点と直線との距離) 点 A と直線 l との距離 d とは，A から l に下ろした垂線の足を H とするとき, **点と直線との距離**

$$d=\mathrm{AH}$$

と定義する。 **(定義終)**

注意

(1) **垂線の足** とは，(上の記号を使って説明するなら) 点 A から直線 l に引いた垂線と l との交点のことをいいました (次図)。 **垂線の足**



(2) 上の定義を関数的に表現すると次のようになります。直線 l 上の点 P をとるたびに定まる 2 点間の距離 AP の最小値を A と l との距離と定義する[8]。

[8] この考え方は後で例題としてとりあげることになるでしょう。

(注意終)

さてこのような定義のもとで次の定理が成り立ちます。

定理 (点と直線との距離)　点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離 d は

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

証明　点 $(x_0,\ y_0)$ から直線 $ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足を $\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ とする (図を描け)。求めるべきは AH であり，2 点間の距離の公式より

$$\mathrm{AH}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

を計算すればよい。

(I) $b\neq 0, a\neq 0$ の場合
直線の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ である。一方直線 AH の傾きは

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

で，これらは垂直である。よって

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\times\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

より，

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{b}{a}$$

よって

$$\frac{x_1-x_0}{a}=\frac{y_1-y_0}{b}$$

この式の値を k とおくと，

$$x_1-x_0=ak,\quad y_1-y_0=bk\ \cdots(1)$$

さらに変形して，

$$x_1=x_0+ak,\quad y_1=y_0+bk$$

$(x_1,\ y_1)$ は直線 $ax+by+c=0$ 上の点なので，

$$a(x_0+ak)+b(y_0+bk)+c=0$$

これを k について解くと，

$$k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\ \cdots(2)$$

さて，(1) を AH の式に代入すると，

$$\mathrm{AH}=\sqrt{(ak)^2+(bk)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)k^2}$$

これに (2) を代入して

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}}$$

AH>0 に注意すると，

$$\mathrm{AH}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(II) $b=0$ の場合 (この場合は $a\neq 0$)

直線の方程式は $ax+c=0$，つまり $\left(-\dfrac{c}{a},\ 0\right)$ を通り，y 軸に平行。

このとき点と直線との距離 d は

$$d=\left|x_0-\left(-\frac{c}{a}\right)\right|=\frac{|ax_0+c|}{|a|}$$

一方

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+c|}{\sqrt{a^2}}=\frac{|ax_0+c|}{|a|}$$

よって公式は成立する。

(III) $a=0$ の場合 (この場合は $b\neq 0$)

問 130 上を真似して証明を書き下せ。

(証明終)

例　点 $(1,\ -2)$ と直線 $4x-3y-3=0$ の距離 d は

$$\begin{aligned}d&=\frac{|4\times 1-3\times(-2)-3|}{4^2+(-3)^2}\\&=\frac{|7|}{5}\\&=\frac{7}{5}\end{aligned}$$

(例終)

練習 234 次の点と直線との距離を計算せよ。

(1) 点 $(2,\ 2)$ と直線 $4x-3y-3=0$

(2) 点 $(-1,\ -3)$ と直線 $2x+y-3=0$

(3) 原点と 直線 $3x-2y+1=0$

21.3　円

直線に関する話は以上で一段落とし，次に円に関する話題に移りましょう。

21.3.1　円の方程式

まず読んでいるみなさんに質問。円とはどんな図形だったでしょうか?
つまり「円の定義」はどのようになっていたでしょう?　先を読む前にノートに書いてみてほしい。

書いてみたでしょうか?　本書では次のように定義します。

定義 (円)　一定点からの一定の距離にある点のあつまりを **円** という。 **円**
上の定点を **中心**，一定の距離を **半径** という。 **(定義終)** **中心** **半径**

内分点などの定義と同じように，この定義は座標に無関係な，もっとも一般的なものです。これを座標を使った表現に書き直していきましょう。

中心 C の座標を $(a,\ b)$，半径を r とする。また，円上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$$\mathrm{CP} = r$$

です。これを座標で表すなら，

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

両辺ともに正なので，2 乗しても同値。よって，

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

逆に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が上の式を満たすと，以上の議論を逆にたどることができて，

$$\mathrm{CP} = r$$

を得ます[9]。
以上のことから次の結論を得ます。

定理 (円の方程式)　$\mathrm{C}(a,\ b)$ 中心，半径 r の円の方程式は **円の方程式**

[9]結局ここでは，点 P が円上にあるための必要十分条件が

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

であることを示しました。
なぜこんなことをしなければならないのかについては，後の節「軌跡の求め方」を参照。

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

例　点 $(-1,\ 3)$ 中心，半径が 2 の円の方程式は，

$$\{x-(-1)\}^2+(y-3)^2=2^2$$

より，

$$(x+1)^2+(y-3)^2=4$$

(例終)

練習 235 次の円の方程式を求めよ。
(1) 点 $(2,\ -1)$ 中心，半径 3 の円　(2) 点 $(-1,\ -1)$ 中心，半径 $\sqrt{5}$ の円
(3) 原点中心，半径 1 の円

逆に円の方程式が与えられたとき，中心と半径が読みとれるようになっていてほしい。

例　方程式

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

は

$$(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2=3^2$$

と変形できるので，$(1,\ -2)$ 中心，半径 3 の円を表す方程式であることがわかる。

(例終)

練習 236 次の方程式で表される円の中心の座標と半径をいえ。
(1) $(x-2)^2+(y-1)^2=1$　(2) $(x+2)^2+(y-3)^2=2$　(3) $(x+1)^2+y^2=16$

さて円の方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

の左辺を展開し，右辺の r^2 を左辺に移項すると，

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0$$

となります。ここで，$l=-2a,\ m=-2b,\ n=a^2+b^2-r^2$ とおくと，

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

を得ます。

以上のことから円の方程式は,

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

と書くことができる，ことがわかりました。

では逆はどうでしょう。つまり

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

という方程式は円を表すでしょうか?

問 131 先を読む前に，これを検討せよ。

例　方程式 $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ を考えましょう。

$x^2 - 6x$ と $y^2 - 4y$ の部分に注目し，それぞれを平方完成してみます。そのためには前者には 9，後者には 4 を加えればできます。バランスをとるために，同じ数を右辺にも加えておきます (下の式の右辺の第一項の 3 は，はじめの式の定数項 -3 を移項したものです)。

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 3 + 9 + 4$$

よって

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

となり，$(3,\ 2)$ 中心，半径 4 の円を表すことがわかります。　**(例終)**

ということは，上の方程式は円を表すのでしょうか?　いやいや結論を出すのはまだはやい。次の例を見てください。

例　方程式 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$ を考える。

上の例と同じようにして平方完成すると,

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$$

となり，右辺は 0 である。これはどう解釈したらよいでしょう?

次のような事実があったことを思い出してほしい。

定理 (実数の平方の和)　$a,\ b$ を実数とするとき,

$$a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$$

この事実を用いると，上の方程式は解けて,

$$x - 3 = 0,\ y - 2 = 0$$

つまり $x=3,\ y=2$。言い替えると方程式 $x^2+y^2-6x-4y+13=0$ は一点 $(3,\ 2)$ を表す。 **(例終)**

ということから，方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ は円を表すとは限りません。では，円と一点を表すのでしょうか？　次の例を見てください。

例　方程式 $x^2+y^2-6x-4y+14=0$ を考える。

平方完成すると，

$$(x-3)^2+(y-2)^2=-1$$

となる。

左辺は実数なので，常に 0 以上。しかし右辺は負。

ということは，この方程式は解をもたない。つまり何も表さない，のである[10]。

(例終)

例題 88 次の方程式はどんな図形を表すか。

(1) $x^2+y^2+2x-4y-4=0$　　(2) $x^2+y^2+4x-2y+6=0$

(3) $x^2+y^2-x-y+\dfrac{1}{2}=0$

解説　上に挙げた三つの例と同様に平方完成し，右辺が正，0，負のいずれになるかを見ればよい。

解答例

(1) 平方完成して，

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

よって $(-1,\ 2)$ 中心，半径 3 の円である。

(2) 平方完成して，

$$(x+2)^2+(y-1)^2=-1$$

よってどんな図形も表さない。

(3) 平方完成して，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

よって一点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を表す。 **(解答例終)**

[10] 本書を順に読んでこられた方は，複素数を知っています。複素数の範囲で考えれば上の方程式は解をもつし，そのような立場の数学もあります (いやむしろそのほうが例外を作らなくて済むので，理論的には扱いやすくなります)。

が，高校レベルの数学では一応実数の範囲でものを考えることになっているので，興味のある人はそちらの方の書物を勉強してください。

練習 237 次の方程式はどんな図形を表すか。

(1) $x^2+y^2-2x+2y-1=0$　　(2) $x^2+y^2-4y+4=0$

問 132 (この問いは少し難しい)

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ が円を表すための必要十分条件を，$l,\ m,\ n$ で表せ。

方程式

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

に関する話をもう一つしておきましょう。

直線のところでも触れたように，

2 点を通る直線はただ 1 本定まる

ということを方程式を用いて確かました。

つまり直線を決めるには $y=mx+n$ の二つの数 $m,\ n$ を決めればよく，そのためには 2 点の座標があれば，十分でした。

同様のことを円について考えましょう。

上の問いから，この式が円を表すには $l,\ m,\ n$ に追加の条件が必要となりますが，一度円を表すことが確かめられたとすると，結局三つの数 $l,\ m,\ n$ が決まればよい。ということは，3 点が与えられれば，円が定まることがわかります。

実際，

1 直線上にない 3 点を通る円がただ一つ存在する

という定理が成り立つのです。

これを具体的な例で確かめてみせましょう。

例題 89 3 点 $(1,\ 1),\ (2,\ -2),\ (4,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

解説　求める方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおき，通るという 3 点をこの方程式に代入し，$l,\ m,\ n$ に関する連立方程式を解けばよい。

解答例　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

$(1,\ 1)$ を通るので，

$$1^2+1^2+l\times 1+m\times 1+n=0$$

よって

$$l+m+n+2=0\ \cdots(1)$$

同様にして，$(2,\ -2)$ を通るので，

$$2l-2m+n+8=0\ \cdots(2)$$

$(4,\ 2)$ を通るので，

$$4l+2m+n+20=0\ \cdots(3)$$

(1), (2), (3) を連立させて解くと，

$$l=-6,\ m=0,\ n=4$$

よって

$$x^2+y^2-6x+4=0\ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

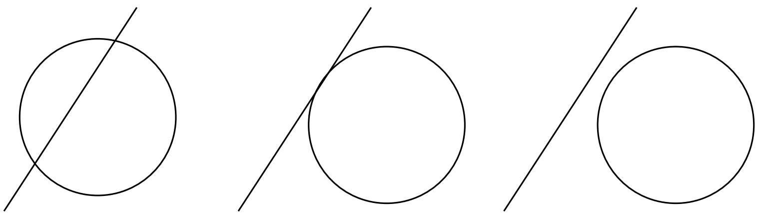
練習 238 3点 $(1,\ 1),\ (3,\ 5),\ (5,\ -1)$ を通る円の方程式を求めよ。

一直線上にない3点を与えると三角形が一つ定まります。その3点を通る円とは，言い替えるとその三角形の外接円になり，その中心はその三角形の外心になっていました。よって与えられた3点を頂点とする三角形の外心を求めるには，その3点を通る円の方程式を求め，平方完成し，中心を計算すればよいことになります。

21.3.2 円と直線

以上のことを元に，今度は円と直線の関係について説明しましょう。

円と直線には次の図のような三つの位置関係がありえます。



交わる　　接する　　交わらない

これらは次のようにして分類できます。

定理 (円と直線の位置関係)　円と直線に関して，円の中心と直線との距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d<0 &\iff \text{交わる} \\ d=0 &\iff \text{接する} \\ d>0 &\iff \text{交わらない} \end{aligned}$$

これまでの話と同様に，ここまでは座標が関係しません。しかしすでに我々は直線の方程式，円の方程式，点と直線との距離の公式を得ているので，上の定理を適用することができます。

例　直線 $4x-3y+5=0$ と円 $x^2+y^2=3$ が交わるかどうかを調べましょう。

そのためには円 $x^2+y^2=3$ の中心 (今の場合原点) と直線 $4x-3y+5=0$ との距離 d を計算すればよい。実行すると，

$$d=\frac{|4\times 0-3\times 0+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$$

一方円の半径は $\sqrt{3}$ で $1=d<\sqrt{3}$。よって交わる。 **(例終)**

練習 239 次の直線と円は交わるか。

(1) 直線 $x+y+1=0$ と円 $x^2+y^2=1$

(2) 直線 $y=3x-2$ と円 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

(3) 直線 $x+2y-5=0$ と円 $x^2+y^2=5$

以上で円と直線の位置関係については一段落なのですが，もう一つの判定法があるので紹介しておきましょう。

実際上の判定法は，円と直線の場合にしか通用しませんが，下に紹介する方法は，二つの図形が方程式で表されるときにも通用する形に一般化できます。

定理 (円と直線の位置関係)　直線の方程式を一方の文字について解き，それを円の方程式に代入して得られる 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D>0 &\iff \text{交わる} \\ D=0 &\iff \text{接する} \\ D<0 &\iff \text{交わらない} \end{aligned}$$

実際，直線の方程式と円の方程式を連立させて解くと，これらの交点が (もしあれば) 得られます。解くときには二つある文字のうちの一方を消去することになりますが，そのようにして得られる方程式は 2 次であり，これが二つの異なる実数解をもつときには交わり，重解のときには接し，実数解をもたないときには交わらないので，上の定理は明らかでしょう。

例　直線 $y=3x-2$ と円 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ は交わるだろうか?

それを調べるには，直線の方程式を円の方程式に代入し，

$$(x+1)^2+(3x-1)^2=1$$

展開して整理すると，

$$10x^2-4x+1=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$D/4=(-2)^2-10\times1=-6<0$$

よって交わらない。 **(例終)**

練習 240 次の直線と円は交わるか。
(1) 直線 $x+y+1=0$ と円 $x^2+y^2=1$ (2) 直線 $x+2y-5=0$ と円 $x^2+y^2=5$

注意 この例とこの練習は一つ前の練習と同じ問題です。いずれの判定法を用いても判定できるようになっていてほしいし，式の特徴に応じてどちらをとるか，も考えてほしい(上の例は円の中心と直線との距離を計算する方が少し楽でしょう)。 **(注意終)**

21.3.3 円の接線の方程式

円と直線の位置関係の中で，接するという関係はかなり特殊な状況です。数学はこの場合に興味があります。
まず言葉を復習しておきましょう。

定義 (接する，接線，接点) 円と直線の共有点が 1 個のとき，円と直線は **接する** といい，この直線を円の **接線**，共有点を**接点** という。 **(定義終)**

接する
接線
接点

円の方程式と接点が与えられていると，次の公式によって接線の方程式が容易に計算できます。

定理 (円の接線の方程式) 円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は，

円の接線の方程式

$$x_0x+y_0y=r^2$$

注意
(1) 円の方程式における x^2 のうちの一つが x_0 に，y^2 の一つが y_0 に置き換わったと見ると覚えやすいでしょう。

(2) ここでは表現を簡単にするために，原点中心の円の場合のみを記しました。研究として，中心が一般の位置にある場合の接線の方程式を与えてください。
(3) 以下の証明では,

円の接線は，その接点を通る半径に垂直である。

という定理を用います。

(注意終)

証明 (I) $x_0 \neq 0$ かつ $y_0 \neq 0$ の場合
中心と接点を結ぶ線分と接線とは垂直に交わる。よって接線の方程式の傾きを m とすると,

$$m \times \frac{y_0}{x_0} = -1$$

よって

$$m = -\frac{x_0}{y_0}$$

ゆえに求める方程式は,

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

分母を払って展開し整理すると,

$$x_0x + y_0y = {x_0}^2 + {y_0}^2$$

ここで $(x_0,\ y_0)$ は円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上にあるので,

$${x_0}^2 + {y_0}^2 = r^2$$

ゆえに,

$$x_0x + y_0y = r^2$$

(II) $x_0 = 0$ のとき
接点は $(0,\ \pm r)$ となり，接線は x 軸に平行で，方程式は $y = \pm r$。
一方

$$x_0x + y_0y = r^2$$

に $x_0 = 0,\ y_0 = \pm r$ を代入すると,

$$\pm ry = r^2$$

よって

$$y = \pm r$$

ゆえに公式は成立する (ただし以上の議論はすべて複号同順)。

(III) $y_0 = 0$ のとき
(II) と同様にして公式が成立することが確かめられる。

問 133 (II) を真似して，証明を書き下せ。

(証明終)

問 134 上の証明の (I) で,「$x_0 \neq 0$ かつ $y_0 \neq 0$」という条件はどこで使われているか，いえ。

例　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ -4)$ における接線の方程式は,

$$3x-4y=25$$

(例終)

注意　上では点 $(3,\ -4)$ が円上にあることは当り前として確かめませんでした。みなさんが出会う問題では，答案で計算する必要はありませんが，確認はしておくように。

(注意終)

練習 241 次の点における円 $x^2+y^2=25$ の接線の方程式を求めよ。
(1) $(-4,\ 3)$　(2) $(0,\ 5)$　(3) $(-5,\ 0)$

21.4　軌跡

初等幾何学においては，ある種の条件を満たす点がどのような図形になるのかに大変興味をもちました。ここではその単純な部分だけを扱います[11]。

21.4.1　軌跡とは

言葉を定義しましょう。

定義 (軌跡)　ある条件を満たす点の集合を，その条件を満たす点の **軌跡** という。 **軌跡**

(定義終)

例を挙げましょう。

例　一定点から一定の距離にある点の集合は，円である。
いや，これが円の「定義」でした。言い替えると，実は円は軌跡の典型的な例なのです[12]。

(例終)

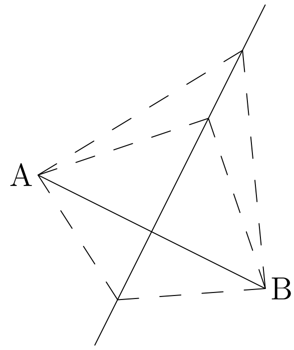
[11] 以前初等幾何学が高校のカリキュラムに含まれていたころの教科書を見ると，軌跡だけに 1 章が割かれています。それくらい重視されていたのですが，重箱の隅をつつくような問題ばかり入試に出るようになったせいか，カリキュラムからはずされてしまいました。
[12] ちなみに定点を「中心」，一定距離を「半径」というのでした。

21.4.2 軌跡の求め方

もう一つ典型的な例を挙げましょう。

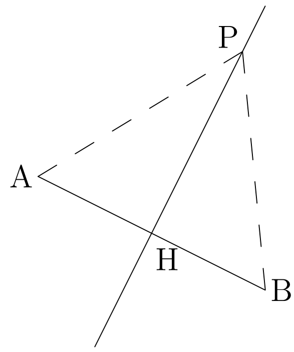
例　2定点 A，B から等距離にある点の軌跡を求めよう。そのために，まずこの軌跡がどのような図形になるのか，いくつか点をとって予想してみてほしい。作図するためにコンパスを用いてもよい。

すると，直線になりそうな感じが見てとれるでしょう。



実際にはもう少し詳しく,「線分 AB の垂直二等分線」になることがいえます。以下これを証明しましょう。

まず2点 A，B から等距離にある点 P を考えましょう。そして点 P から線分 AB におろした垂線の足を H とする。このとき△APH と△BPH は合同になるので[13]，AH=BH。



これは点 P が線分 AB の垂直二等分線上にあることを意味します。

次に点 P が線分 AB の垂直二等分線上にあるとしましょう。今度は線分 AB と垂直二等分線の交点を H とすると，やはり△APH と△BPH は合同になるので，AP=BP [14]。よって点 P は二点 A，B から等距離にある。

以上から2定点から等距離にある点の軌跡が，その2定点を結ぶ線分の垂直二等分線となることが結論できます。 **(例終)**

[13]証明せよ!

[14]これも証明せよ!

以上は一体何をやったのでしょうか?
命題として考えると実は,

p: 点 P は 2 定点 A，B から等距離にある。

という命題と,

q: 点 P は線分 AB の垂直二等分線上にある。

という命題が同値であることを証明したことになっています。

多くの高校生は,「p ならば q」のみをいえばよいように感じるらしい (私もそうでした)。しかし，もう一度真理集合に関する解説を読み直してほしい。
軌跡を求めるということは，条件 p を満たす集合を「完全」に決定することです。そのために,「p ならば q」のみを証明したとすると，これは p の真理集合 P が q の真理集合 Q の部分集合であることを示したにすぎません。つまり集合 P が集合 Q の一部分，言い替えると，Q に入るが P に入らない部分があるかもしれないのです。この可能性を排除するには,「p ならば q」の逆命題「q ならば p」を証明するしかありません。

結局軌跡を求めるということは，我々にわかりにくい条件 (たとえば 「2 定点から等距離にある」) を，わかりやすい条件 (「線分の垂直二等分線」) に言い替えるということともいえるでしょう。そのために，二つの条件が同値であることを示す必要があるのです。

21.4.3　軌跡の方程式

さて，ここまでの話のパターンと同じように，先の節の話は座標に依存していません。この節では，先の節とおなじことを今度は座標を用いてやって見せましょう。つまり，与えられた条件を式で表し，得られた方程式がどのような図形になるのかを見るのです。

例　2 定点 A，B の座標をそれぞれ A$(c,\ 0)$, B$(-c,\ 0)$ とする。ただし $c \neq 0$ である。
条件を満たす点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると,

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$$

AP, BP は線分の長さなので正。よって 2 乗しても同値[15]。ゆえに,

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$$

[15]一般に

$$a = b \implies a^2 = b^2$$

は成り立ちますが，逆は成り立ちません (反例を与えよ!)。

座標を代入すると，

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2$$

展開して整理すると，

$$4cx=0$$

$c \neq 0$ なので，

$$x=0$$

この方程式は y 軸を表す。すなわち線分 AB の垂直二等分線になっている。

以上の議論は逆にたどることができるので，2 点 $\mathrm{A}(c,\ 0)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$ から等距離にある点の軌跡は線分 AB の垂直二等分線であることが結論できる。 **(例終)**

注意

(1) ここまでの問題と同じように，計算が楽になるように 2 点の座標を決めている。

(2) 上に「以上の議論は逆にたどることができる」と書きましたが，これをきちんと確かめておいてほしい。「$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ ならば $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$」の部分のみが少しわかりにくいので，上では特に記した。

(注意終)

練習 242 2 点 $(-2,\ -1)$, $(-1,\ -2)$ から等距離にある点の軌跡の方程式を求めよ。

例題 90 2 定点 $\mathrm{A}(-6,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$ に対して

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ。

解説 上の例と同じように，条件を式に翻訳してゆけばよい。

解答例 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$$

内項の積は外項の積に等しいので，$2\mathrm{BP}=\mathrm{AP}$。

両辺ともに正なので 2 乗しても同値。ゆえに

$$4\mathrm{BP}^2=\mathrm{AP}^2$$

しかし $a,\ b$ がいずれも正の数なら逆も成り立ち，$a=b$ と $a^2=b^2$ は同値となります。ここではこれをもちいました。

先の節の解説から想像できるように，同値な条件を求めなければなりません。そしてここ以外の変形はすべて同値です。よく味わってください。

座標を代入すると，

$$4\{(x-3)^2+y^2\}=(x+6)^2+y^2$$

展開して整理すると

$$3x^2-36x+3y^2=0$$

両辺を 3 で割って，

$$x^2-12x+y^2=0$$

平方完成すると，

$$(x-6)^2+y^2=36$$

以上の議論は逆にたどることができるので，点 P の軌跡は，

$$(6,\ 0)\ \text{中心，半径}\ 6\ \text{の円}\ \cdots\ \textbf{(答)}$$

(解答例終)

注意　一般に，2 定点 A，B に対して

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=m:n\quad (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$$

を満たす点 P の軌跡は，線分 AB を $m:n$ に内分，外分する点を直径の両端とする円になることが知られている (これを座標を用いて確かめよ!)。この円を **アポロニウスの円**という。 **(注意終)**

アポロニウスの円

練習 243　2 定点 A$(-2,\ 0)$, B$(3,\ 0)$ に対して，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=3:2$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ。

21.5　さらに勉強するために

まえがきに書いたように，解析幾何学には図形の直観より計算によって証明や結果を得ていこうという方針があります。しかしそういいながら，本文中に取り上げた例題や演習問題では図形の直観によって計算量が少なくなり，よりスマートに解決できるものが多く現れました。

このあたりははじめの趣旨とは矛盾するのですが，結局は図形に関する直観，計算力のいずれも重要，という極めて陳腐(ちんぷ)な結論が得られます。

図形に関する直観は，中学校までにだいぶん身につけてきていると思います。しかし最近の高校生を見ると，そのへんが大分怪しくも感じられます。これらに不

安を感じる人は，今一度中学校の図形の分野を復習しておいてください。本章でもそこで紹介されているいくつかの事実を援用しています。

また方程式の扱いについては，ここまでの章である程度カバーしています。特に2次の連立方程式については，最近の教科書ではあまり詳しく扱っていません。本書の「さまざまな方程式の解き方」でそれらを扱ったのは，本章で扱ったようなテーマにおいてきちんとした計算力を養っておいてほしいからでした。

今からでも遅くはありません。これらの章を今一度復習し，計算力をつけておいてください。

解析幾何学は，この後「代数幾何学」と「微分幾何学」という二つの方向へ発展します。

代数幾何学は，その名の通り，代数学の手法をもちいて図形の性質を研究するものです。本章で方程式を用いて図形を調べて見せたわけですが，代数幾何学ではこれをさらに発展させます。

一方微分幾何学は，本シリーズの最後の話題となるであろう微分という手法を用いて図形を研究する分野です。

いずれの分野も，いまだに汲み尽くせぬ研究課題が山積みとなって残っています。

本章で残した話題に,「不等式と領域」,「2次曲線 (円錐曲線)」があります。いずれも後で取り上げるつもりです。