第22章　数　列

22.0　はじめに

本章のテーマは数列です。

これ自身面白いテーマでもありますし，微分積分など他のテーマとも深い関係を持つものでもあります。

まずは数列とはどんなものなのかを定義し，単純なものである 等差数列 と 等比数列 を紹介します。これらの一般項は，完全にわかっています。

同時にそれらの和の計算方法も紹介します。

次に，数列の和をある程度機械的に計算できる和の記号 $\sum$ の性質とその使い方を紹介します。

これは，$\sum$ 自身の性質の重要性もありますが，和を取ることによってより複雑な数列の一般項が求められるようになるからです。それが「階差数列」の考え方と，それを用いた一般項の求め方です。

最後の節では「帰納的な考え方」の代表例として，漸化式の考え方と数学的帰納法を紹介します。

漸化式とは，いくつかの項の間の関係式のことです。いつでもうまくいくわけではありませんが，その関係式から一般項を求めることができることがあります。その方法を二つほど紹介しました。

数学的帰納法は，非常に重要な証明方法の一つです。本文ではごくわずかしか例を紹介しませんでしたから，多くの練習を各自しておいてください。

22.1　数列

22.1.1　数列とは

まずは定義から。

定義 (数列)　数をある一定の規則によって並べたものを **数列**という。**(定義終)**　**数列**

たとえば。

例　2 からはじめ，次々に 3 を加えたもの

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots$$

は数列である。 **(例終)**

例　1 からはじめ，次々に 2 をかけたもの

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$$

は数列である。 **(例終)**

注意　定義にあるように,「数をある一定の規則によって」並べたものが数列です。この定義と関数の定義を読み比べてください。よく似ていることに気がつくでしょう (関数の定義については，第 11 章「1 次関数の復習」参照)。

実は，数列は関数の一種です。実際後で見るように，数列の一般項は自然数 n を用いて a_n と表されます。つまり自然数 n に数 a_n をなんらかの規則によって対応づけるわけです。 **(注意終)**

数列に関する用語をいくつか紹介しましょう。

定義 (項，初項，第 n 項，一般項)　数列において，おのおのの数をその数列の **項** といい，はじめの項から順に，第 1 項，第 2 項，第 3 項，$\cdots$ という。第 1 項は **初項** ともいう。 **項** **初項**

特に n 番目の項を 第 n 項あるいは **一般項** という。 **(定義終)** **一般項**

数列を一般的に表すときには，初項を a_1，第 2 項を a_2，$\cdots$，第 n 項を a_n として,

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

のように表します。また，これを略して $\{a_n\}$ と書くこともあります。

上の定義のとおり，数列は「ある一定の規則」にしたがって数を並べたものです。たとえば，はじめの例は「2 からはじめ，次々に 3 を加える」という規則にしたがっていますし，二番目の例は,「1 からはじめ，次々に 2 をかける」という規則にしたがって作られた数列になっています。

ところで，たとえば最初の例で 123 番目の項，つまり第 123 項がどんな値か，すぐにわかるでしょうか?

上の規則の書き方では，初項から順に計算していかないと，第 123 項を求めることはできません。それではかなり面倒です。第 123 項ならいい方です。第 1234567890 項 (いくらだ?) を求めてくれなどといわれたら，できなくはありませんが，かなり時間がかかりいまのところお手上げでしょう。

しかし，もし第 n 項が n に関する式などで表現できたら，上の問題も簡単になります。

例　$a_n = 3n - 1$ と表される数列 $\{a_n\}$ について,

初項は $n=1$ を代入して，$a_1 = 3 \times 1 - 1 = 2$
第 2 項は $n=2$ を代入して，$a_2 = 3 \times 2 - 1 = 5$
第 3 項は $a_3 = 3 \times 3 - 1 = 8$
第 123 項は，$a_{123} = 3 \times 123 - 1 = 368$ **(例終)**

与えられた数列がいつでもこのような式で表されるとは限りませんが，できたらラッキーです。

問 135 上の例の数列 $\{a_n\}$，$a_n = 3n - 1$ の第 1234567890 項を求めよ。

練習 244 一般項 a_n が次の式で表される数列の初項から第 5 項までを書け。
(1) $2n+1$ (2) $n^2 - 2n$ (3) 3^n (4) $(-1)^{n-1}$

以下では，ひとまず単純な規則で作られる数列をいくつか調べ，その上でより複雑な数列について解説していきます。
その一つが 等差数列，もう一つが等比数列です。まずは等差数列から説明しましょう。

22.2 等差数列

22.2.1 等差数列の定義

単純な規則で作られる数列の一つに 等差数列 があります。定義は次の通りです。

定義 (等差数列) 隣り合う 2 項の差が一定である数列を **等差数列** という。一定の差を，この等差数列の **公差** という。 **(定義終)**

等差数列
公差

注意 ことばで書くと，ちょっとあいまいなところがあるので，式で表しましょう。
数列を $\{a_n\}$ とします。この数列が，

$$a_{n+1} - a_n = (\text{一定})$$

という式を満たすとき，等差数列といいます。
そしてこの「一定」な値を公差というわけです。 **(注意終)**

例 2 からはじめ，次々に 3 を加えてできる数列

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \cdots$$

は公差が 3 の等差数列である。 **(例終)**

注意　上の例は等差数列になっています。本書では「隣り合う 2 項の差が一定」という条件で等差数列を定義しましたが，教科書によっては，初項に次々と一定の値を加えて得られる数列を等差数列と定義しているものもあります。これらが同じものを意味することはすぐにわかるでしょう。

ここでは「等差」という意味がわかるように，定義を与えてみました。　**(注意終)**

22.2.2　等差数列の一般項

さて，等差数列の一般項は簡単に求められます。

それには，上の注意で用いた等差数列の別定義を用いた方が簡単です。

初項が a，公差が d の等差数列を考えましょう。すると数列は，

$$\begin{aligned}&a_1 = a\\&a_2 = a_1 + d = a + d\\&a_3 = a_2 + d = a + 2d\\&\cdots\end{aligned}$$

となることがわかります。

これより，

$$a_n = a + (n-1)d$$

であることがわかります。

定理 (等差数列の一般項)　初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられる。

注意　厳密な証明は，本章の後半で説明する「数学的帰納法」によってなされます。
(注意終)

例　初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

となる。　**(例終)**

練習 245 次の条件を満たす等差数列の一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

(1) 初項 1，公差 2　　(2) 初項 5，公差 -3

例題 91 第 5 項が 11，第 8 項が 20 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説　等差数列の扱い方になれてもらうための例題です。

　等差数列は初項 a と公差 d によって完全に決まってしまいます。つまり，この二つの値が求まれば一般項が書き下せます。そして定理「等差数列の一般項」より

$$a_n + a + (n-1)d$$

となることがわかっていますので，与えられた条件からこれらに関する連立方程式を作ればいいわけです。

　実際第 5 項が 11 なので，$a_5 = 11$，つまり

$$a + (5-1)d = 11$$

なので,

$$a + 4d = 11$$

を得ますし，第 8 項が 20，つまり $a_8 = 20$ なので,

$$a + 7d = 20$$

となります (確かめよ!)。

　これらを連立させて解けば，$a = -1,\ d = 3$ となります。

解答例　第 5 項が 11 なので,

$$a + 4d = 11 \ \cdots (1)$$

また，第 8 項が 20 なので,

$$a + 7d = 20 \ \cdots (2)$$

　(1), (2) を連立させて解くと,

$$a = -1, \quad d = 3$$

　よって一般項は,

$$a_n = -1 + (n-1) \times 3 = 3n - 4 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 246 第 8 項が 33，第 15 項が 54 の等差数列の一般項を求めよ。

22.2.3　等差数列の特徴づけ

定理「等差数列の一般項」より，初項 a，公差 d の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

と表されます。

これは，n に関する 1 次式になっていることに注意しましょう。

で，いつものように逆を考えてみます。つまり，一般項が n に関する 1 次式で表されるような数列は等差数列か?　という問題を考えてみます。

これを考えるには等差数列の定義が成り立っているかどうかを確かめればよいので簡単です。これより次の定理が得られます。

定理 (一般項が n に関する 1 次式で表される数列)　一般項が n に関する 1 次式で表される数列は等差数列である。

証明　数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = pn + q$ と表されるとする。このとき，

$$a_{n+1} - a_n = \{p(n+1) + q\} - (pn + q) = p$$

となり，p は一定。

よって，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。　**(証明終)**

定理「等差数列の一般項」とあわせると，次の定理が得られます。

定理 (等差数列の特徴づけ (その 1))　数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるための必要十分条件は，一般項 a_n が n に関する 1 次式で表されることである。

注意　関数の中でもっとも単純なものは 1 次関数でした。

上の定理から，数列の中で一般項がもっとも単純な n に関する 1 次式で表現できるのが，等差数列であることがわかりました。

同じ意味で単純なのが，次の節で紹介する 等比数列です。　**(注意終)**

22.2.4　数列の和

だいぶん後になりますが，数列 $\{a_n\}$ に対して，初項から第 n 項までの和 S_n を考えることが必要になります。

記号の定め方から，

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

です。

どんな数列でもその和を式で表せるとは限りません。まずは，やさしい場合として，等差数列和と等比数列の和などを考え，後でもう少し一般的な数列の和を求める方法を紹介します。

22.2.5 等差数列の和

具体的な例として，等差数列の和を考えましょう。

初項 a，公差 d の等差数列のはじめの n 項の和を S_n としましょう。このとき，S_n は a と d を用いて表すことができます。

定理 (等差数列の和の公式)　初項 a，公差 d の等差数列のはじめの n 項の和を S_n とするとき，

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

特に第 n 項を l とするとき，

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + l)$$

注意

(1) 第 n 項を数列の最後の項と考えて，**末項** ということがあります。 **末項**

(2) 式

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + l)$$

を見て，台形の面積の計算公式を思い出した人があるかもしれません。いいセンスしています。以下の証明をその直観に合わせて読んでみてください。

(3) 公式

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

の右辺を展開すると，n に関する 2 次式になっており，定数項がないことに注意してください。

(注意終)

証明

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a + (n-1)d\} \ \cdots(1)$$

である。この数列の末項を l としよう。この数列を逆の順に並べた数列は，初項 l，公差 $-d$ の等差数列で，その和は S_n に等しく，

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + \{l - (n-1)d\} \ \cdots(2)$$

である。

(1)，(2) の辺々を加えると，右辺は $a+l$ を n 個加えたものになっているので，

$$\begin{aligned} 2S_n &= \underbrace{(a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l)}_{n\text{ 個}} \\ &= n(a+l) \end{aligned}$$

よって，

$$S_n = \frac{1}{2}(a+l)$$

また，$l = a + (n-1)d$ なので，

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

(証明終)

例　初項 3，公差 4 の等差数列の，初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n\{2 \times 3 + (n-1) \times 4\} \\ &= \frac{1}{2}n(4n+2) \\ &= 2n^2 + n \end{aligned}$$

(例終)

例　初項 -4，末項 41，項数 10 の等差数列の和 S_n は，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \times 10 \times (-4+41) \\ &= 185 \end{aligned}$$

(例終)

練習 247 次の等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 2，公差 -2，項数 n　　(2) 初項 80，末項 20，項数 n

問 136 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

上の問で与えた等式は，後で何度も使うことになりますので，覚えておいてください。また，後で「数学的帰納法」を用いた別証明を与えます。

例題 92 はじめの n 項の和 S_n が $S_n = n^2 - 2n$ である数列 $\{a_n\}$ は，等差数列であることを証明せよ。

解説　等差数列とは，隣り合う 2 項の差が一定な数列でした。よって，その定義を確かめればよいことになります。しかし与えられているのは和 S_n であり，一般項 $\{a_n\}$ ではありません。

それゆえちょっと悩むことになりますが，数列の和 S_n は

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

で定義されていたことに注意しましょう。

この式は，

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

であり，$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ ですから，結局

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

であることがわかります。S_{n-1} を移項すると，

$$a_n = S_n - S_{n-1} \cdots (1)$$

となり，和からもとの数列の第 n 項が復元できます。

しかし，ちょっと注意しましょう。上の関係式 (1) は n が 2 以上の場合だけ成り立ちます。実際 $n = 1$ とすると，右辺は $S_1 - S_{1-1}$ となり，2 番目の項が S_0 となってしまい，これは意味がないからです。

そこで，(1) で得られた式が $n = 1$ のときにも成り立つかどうかを，確かめておく必要が出てきます。

記号 S_n の意味を思い出しましょう。S_n は「初項から第 n 項までの和」でした。ということは，S_1 は「初項から第 1 項までの和」です。

これは，日本語としてはちょっと変ですが，結局第 1 項のみのことです。つまり，

$$S_1 = a_1$$

です。これから，上の (1) を用いて得られた式が $n = 1$ のときにも成り立つかどうかが確かめられます。解答例の後半は，これを確かめています。

解答例　$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

なので，

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 2n - 3 \cdots (*) \end{aligned}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$a_n = 2n - 3$ が成り立つ。

また，

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1$$

一方，$(*)$ で $n=1$ とすると，-1 を得る。
つまり，$(*)$ は $n=1$ のときも成立している。
よって，すべての自然数 n に対して，

$$a_n = 2n - 3$$

つまり，一般項が n に関する 1 次式になっている。
ゆえに，定理「等差数列の特徴づけ (その 1)」より，数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることが結論できる。 **(解答例終)**

練習 248 はじめの n 項の和 S_n が $S_n = an^2 + bn$ ($a,\ b$ は定数) である数列 $\{a_n\}$ は，等差数列であることを証明せよ。

一方，等差数列の和の公式から，その初項から第 n 項までの和は n に関する 2 次式で定数項はありません。つまり $S_n = an^2 + bn$ とあらわすことができます (定理「等差数列の和の公式」の後の注意参照)。
以上のことから，次の定理が得られます。

定理 (等差数列の特徴づけ (その 2)) 数列 a_n が等差数列であるための必要十分条件は，初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n = an^2 + bn$$

と表されることである。

22.3 等比数列

22.3.1 等比数列の定義

等差数列と同じくらい単純な規則で作られるもう一つの数列が 等比数列 です。

定義 (等比数列) 隣り合う 2 項の比が一定である数列を **等比数列** という。一定の比を，この等比数列の **公比** という。 **(定義終)** 等比数列 公比

注意
(1) 等差数列の定義とそっくりであることを確かめておいてください。

(2) ことばで書くと，ちょっとあいまいなところがあるので，式で表しましょう。数列を $\{a_n\}$ とします。この数列が，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (\text{一定})$$

という式を満たすとき，等比数列といいます。
そしてこの「一定」な値を 公比 というわけです。

(注意終)

例　2 からはじめ，次々に 3 をかけてできる数列，

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \cdots$$

は公比が 3 の等比数列である。 **(例終)**

注意　上の例は等比数列になっています。本書では「隣り合う 2 項の比が一定」という条件で等比数列を定義しましたが，教科書によっては，初項に次々と一定の値をかけて得られる数列を等比数列と定義しているものがあります。これらが同じものを意味することはすぐにわかるでしょう。

ここでは,「等比」という意味がわかるように，定義を与えてみました。 **(注意終)**

22.3.2　等比数列の一般項

さて，等比数列の一般項は簡単に求められます。

それには，上の注意で用いた等比数列の別定義を用いた方が簡単です。

初項が a，公比が r の等比数列を考えましょう。すると数列は,

$$\begin{aligned}
a_1 &= a \\
a_2 &= a_1 \times r = ar \\
a_3 &= a_2 \times r = ar^2 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

となることがわかります。

これより,

$$a_n = ar^{n-1}$$

であることがわかります。

定理 (等比数列の一般項)　初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられる。

注意　厳密な証明は，本章の後半で説明する「数学的帰納法」によってなされます。

(注意終)

例　初項 2，公比 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

となる。 **(例終)**

注意　最後の $2 \times 3^{n-1}$ を 6^{n-1} としないように!!

累乗と，かけ算では累乗の方をさきに計算する，という約束があります。ですから，ちょっと変な感じがするかもしれませんが，これ以上変形しないようにしましょう。 **(注意終)**

練習 249 次の条件を満たす等比数列の一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

(1) 初項 1，公比 2　　(2) 初項 5，公比 -3

例題 93 第 2 項が 6，第 5 項が 48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説　ひとまず初項を a，公比を r とすると，一般項 a_n は

$$a_n = ar^{n-1}$$

と表すことができます。

第 2 項が 6 なので，$a_2 = 6$。よって，

$$ar^{2-1} = 6$$

つまり，

$$ar = 6 \ \cdots (1)$$

です。

また，第 5 項が 48 なので，$a_5 = 48$。よって，

$$ar^{5-1} = 48$$

つまり，

$$ar^4 = 48 \ \cdots (2)$$

です。

これで a と r に関する方程式が二つ得られたことになります。よって，これらを連立させて解けばよいわけです。

とはいうものの，こういったタイプの連立方程式には初めて出会ったでしょうから，戸惑うでしょう。

しかし連立方程式を解くときの基本方針は「一方の文字を消去する」ということにありました。これを覚えていれば，上の二つの式を用いて a, r の一方を消去する方法を工夫すればよいだろう，という方針が立ちます。

しかしそんなことが可能なのでしょうか。

今の場合は可能です。

実際 (2) の式を，

$$ar \times r^3 = 48$$

と見れば，ここに (1) の式を代入することによって a を消去することができます。

実行すると，

$$6r^3 = 48$$

よって，

$$r^3 = 8$$

これを満たす r は2。

うまく r が求められました。

以下これを (1) に代入すれば，めでたく a の値を求めることができます。

解答例　初項を a，公比を r とする。

第 2 項が 6 なので，

$$ar = 6 \ \cdots (1)$$

また，第 5 項が 48 なので，

$$ar^3 = 48 \ \cdots (2)$$

(1) を (2) に代入して a を消去すると，

$$r^3 = 8$$

を得る。

r は実数なので，これを満たす r は

$$r = 2$$

これを (1) に代入して a を求めると，

$$a = 3$$

よって，

$$a_n = 3 \times 2^{n-1} \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

補注　方程式 $r^3 = 8$ は一つの実数解と二つの複素数解を持ちます。よって，本来なら三つの答えがありえますが，高校数学では公比は実数の場合のみ考えます。　**(補注終)**

練習 250 $a_4 = 24,\ a_7 = 192$ である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

練習 251 第 3 項が 3，第 7 項が 48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

22.3.3 等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n としましょう。

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \quad \cdots (1)$$

両辺に r をかけると，

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \quad \cdots (2)$$

(1) から (2) を辺々引けば，

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

よって，$r \neq 1$ なら，両辺が $1-r$ で割れ，

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を得ます。

$r = 1$ のときには，(1) は

$$S_n = \overbrace{a + a + \cdots + a}^{n\text{ 個}} = na$$

よって，次の定理を得ます。

定理 (等比数列の和の公式) 初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$\begin{aligned} &r \neq 1 \text{ のとき} \qquad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ &r = 1 \text{ のとき} \qquad S_n = na \end{aligned}$$

例 初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n = \frac{2(1-3^n)}{1-3} = -(1-3^n) = 3^n - 1$$

(例終)

練習 252 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) 初項 3，公比 2　　(2) 初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2}$

22.4　いろいろな数列

22.4.1　平方和，立方和

以上で数列の基本的な部分は終わりました。

これからの課題は，より一般的な数列の一般項を求めたり，和を求めることです。その準備として，この節では二つの公式を紹介しておきます。

これらは次の定理に示すものです。

定理 (平方和の公式，立方和の公式)　　**平方和の公式**　**立方和の公式**

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

証明　まず $(k+1)^3$ を展開した

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$$

から，

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

という式が得られることに注意しましょう。平方和 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ を求めるのに，3 乗の式を用いるのはちょっと面白いですね。

k は何でもよいので，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,n$ と順においてみます。すると，

$$\begin{aligned}2^3-1^3&=3\cdot1^2+3\cdot1+1\\3^3-2^3&=3\cdot2^2+3\cdot2+1\\4^3-3^3&=3\cdot3^2+3\cdot3+1\\&\cdots\\(n+1)^3-n^3&=3\cdot n^2+3\cdot n+1\end{aligned}$$

という一連の式が得られます。ここで，右辺の第 1 項の中に $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots$ が現れていることに注意してください。

これらを辺々加えると，左辺は次々に消えてゆき，最終的には $(n+1)^3-1$ しか残りません (各自必ず確認してください)。

一方右辺の方は第 1 項はすべて 3 でくくれて，

$$3(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

となり，第 2 項も 3 でくくれて，

$$3(1+2+\cdots+n)$$

また，第 3 項は 1 が n 個ありますから n になります。

つまり

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

523 ページの問いの公式，

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

であったことを思い出しましょう。

求める和を S としておくと，上の式は，

$$(n+1)^3-1=3S+\frac{3}{2}n(n+1)+n$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}3S&=(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n\\&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

よって，

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

問 137 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ が成り立つことを用いて，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

(証明終)

注意　証明の中の

$$(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

の部分はちょっとわかりにくいかもしれません。

まずは左辺を $\dfrac{1}{2}$ でくくると，

$$(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n=\frac{1}{2}\left\{2(n+1)^3-2-3n(n+1)-2n\right\}$$

となり，あとは { } の中を計算すれば済みます。

{ } の中の計算を実行すると，$2n^3+3n+n$ が得られ，まずは n でくくり，残りは2次式なので，たすきがけ を用いれば因数分解できます。
以上のことを手がかりにして，必ず

$$(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

の変形をフォローしておいてください。
問いは，この変形になれていないとまずできないでしょう。
多少計算量が多い思いますが，これくらいで音をあげず，やりきってください。

(注意終)

これら二つの公式と，上の証明でも用いましたが，523 ページの問いで紹介した，

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

は是非記憶してください。以下で使います。

22.4.2　和の記号 $\sum$

数列の一般項を求めるためのもう一つの準備として，和の記号 $\sum$ とその性質を紹介しましょう。
これまで数列の和を表すのに，

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

というような記号を用いてきましたが，これだと a_n がどんなものなのかわかりにくいので，つぎのような記号を用いることにします。

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

この記号の利点は，a_n が n に関する式として表せているときには，その式をそのまま a_k に書くことができることと，後で実際にやって見せますが，先の節で紹介した「平方和，立方和の公式」などが機械的に適用でき，計算がかなり楽になることにあります。
例を挙げましょう。

例　初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=3n-1$ と書ける。この数列の初項から第 n 項までの和は，

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)$$

と表すことができる。 **(例終)**

例　初項 1，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 2^{n-1}$ なので，その初項から第 n 項までの和は，

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$

(例終)

この記号を用いると，前節で紹介した覚えてほしい三つの公式は次のように表すことができます。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

上では第 n 項までの和を考えていますが，具体的な項までの和を表しても構いません。

たとえば，

例　$a_n = n+3$ の初項から第 23 項までの和は，

$$\sum_{k=1}^{23}(k+3)$$

(例終)

必ず初項からでなければならないというわけでもありません。

例　$a_n = n+3$ の第 10 項から第 23 項までの和は，

$$\sum_{k=10}^{23}(k+3)$$

(例終)

それぞれをよく見て，どこがどのように変わっているかをつかんでください。

例　和

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + n(n+2)$$

を記号 $\sum$ を用いて表わしてみましょう。

$\sum$ の定め方から，一般項がわかれば簡単です。

この例の場合，最後の項が第 n 項となっていますので，$n(n+2)$ が一般項になっています。

よって，

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(例終)

練習 253 和

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

を記号 $\sum$ を用いて表せ。

例題 94 次の数列

$$\frac{1}{1\cdot 3},\ \frac{1}{2\cdot 5},\ \frac{1}{3\cdot 7},\ \cdots$$

の初項から第 n 項までの和を記号 $\sum$ を用いて表わせ。

解説　一般項を式で表すことができないと，書き換えることができません。そこで与えられた数列をよく見てみます。

分子はどれも 1 ですから，こちらは問題ないでしょう。

分母はどうでしょう。

$$1\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 7,\ \cdots$$

という数列で，それぞれの項はかけ算でできています。

さらによく見ると，かけられる数 (つまりかけ算のはじめの方の数) は

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

となっており，これはやさしいですね。つまり n 番目の項は n になっているはずです。

一方かける数 (かけ算のあとの方の数) は

$$3,\ 5,\ 7,\ \cdots$$

となっています。これがどんな数列か，すぐにわかりますか?　そう，初項 3，公差 2 の等差数列ですね。よって第 n 項は $2n+1$。

以上の考察から，第 n 項は

$$\frac{1}{n(2n+1)}$$

であることがわかります。

解答例　与えられた数列の一般項は,

$$\frac{1}{n(2n+1)}$$

よって,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 254 次の数列

$$\frac{1}{2^2-1},\ \frac{1}{4^2-1},\ \frac{1}{6^2-1},\ \cdots$$

の初項から第 n 項までの和を記号 $\sum$ を用いて表わせ。

22.4.3　$\sum$ の性質

$\sum$ は次のような性質を持っています。

定理 ($\sum$ の性質)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$　(c は k に無関係な数)

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$　(c は k に無関係な数)

注意

(1) 上の定理の (1), (2) を合わせて「$\sum$ の線型性」ということがあります。　**線型性**
「線型性」ということばは, これから何回か出てきますが, 現代数学でもっとも重要な考え方の一つです。

(2) わたしは, (1) を「和のシグマは, シグマの和」, (2) を「定数倍は前に出る」などと読むことがあります。

(注意終)

証明　(1) は次の式を $\sum$ を用いて書き直したのに過ぎない。

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

また (2) は分配法則から明らかである。 **(証明終)**

問 138 定理「$\sum$ の性質」の (2) の証明をきちんと書き下せ。

補注 $\sum$ の線型性から次の公式も成り立ちます。

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

つまり「差のシグマは，シグマの差」です。
証明

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) &= \sum_{k=1}^{n}\{a_k + (-b_k)\} \quad (\text{引き算を足し算に直した}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}(-b_k) \quad ((1)\ \text{を用いた}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (\text{第 2 項に (2) を用いた})
\end{aligned}$$

(証明終)

この証明は $\sum$ が他のものに変わっても同様に使えます。そのため今後,「線型性」が出てくるところでは，いちいち引き算も成り立つ，という注意はしません。頭の隅においておいてください。 **(補注終)**

補注 線型性は次の一つの式で表されることもあります。ここで $c,\ d$ は k に無関係な数です。

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k + db_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + d\sum_{k=1}^{n} b_k \cdots (*)$$

実際，(1) と (2) を合わせたものと，$(*)$ は同値です。
証明 (1)，(2) $\Longrightarrow$ $(*)$ **の証明**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(ca_k + db_k) &= \sum_{k=1}^{n} ca_k + \sum_{k=1}^{n} db_k \quad ((1)\ \text{を用いた}) \\
&= c\sum_{k=1}^{n} a_k + d\sum_{k=1}^{n} b_k \quad ((2)\ \text{を用いた})
\end{aligned}$$

$(*)$ $\Longrightarrow$ (1)，(2) **の証明**
$(*)$ で $c = d = 1$ とすると (1) が得られ，$d = 0$ とすると (2) が得られる。 **(証明終)**

このような事情から,「線型性」をいうときには，専門書では $(*)$ だけを挙げることが多いようです。 **(補注終)**

定理「$\sum$ の性質」を用いた計算をして見せましょう。

例題 95 和

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2)$$

を求めよ。

解説　先に $\sum$ を用いて表す練習をした例と同じ設定です。この和を n で表せ，という問題にしました。

先にやったように，この和は，

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)$$

と表すことができます。以下これを，$\sum$ の性質と平方和などの公式を用いて書き換えていきます。

まずは $k(k+2)$ を展開して k^2+2k となります。そこで $\sum$ の性質を用いれば，

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

となります。

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

だったことを思い出すと，

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n(n+1)$$

となり，あとはこの右辺を $\dfrac{1}{6}n(n+1)$ でくくれば，きれいな式になります。

解答例　与えられた和を S とすると，第 n 項が $n(n+2)$ となっていることから，

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} k(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + n(n+1) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\} \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7) \quad \cdots \textbf{(答)}
\end{aligned}$$

(解答例終)

練習 255 和
$$1+3+\cdots+(2n-1)$$
を求めよ。

22.4.4 階差数列

以上の準備のもとに，一般的な数列の第 n 項を求めてみましょう。

例 数列
$$2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots$$
は等差数列でも，等比数列でもありません。
しかし隣り合う 2 項の差を計算してみます。すると，
$$3-2=1$$
$$5-3=2$$
$$8-5=3$$
となっていますので，この数列の第 5 項は，$8+4=12$ であろうことが想像できます。 **(例終)**

ある数列 $\{a_n\}$ に対して，
$$b_k=a_{k+1}-a_k$$
として定義される新しい数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の **階差数列** といいます。 **階差数列**

例 数列
$$1,\ 2,\ 6,\ 15,\ 31,\ 56,\ \cdots$$
の階差数列は,
$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots$$
である。 **(例終)**

階差数列のよさは，もし階差数列が我々のよく知っている数列なら，それをもとにはじめの数列が復元できることにあります。
つまり，次の定理が成り立ちます。

定理 (階差数列の和と一般項) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。
$n \geqq 2$ のとき，
$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

注意　$\sum$ の上限が $n-1$ であることに注意してください。$n \geqq 2$ という条件は，これが意味を持つようにつけられています。 **(注意終)**

証明　定義より，

$$b_k = a_{k+1} - a_k$$

だったので，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} b_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1})\\ &= a_n - a_1\end{aligned}$$

(証明終)

例題 96 数列

$$2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots$$

の一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

解説　先の例に挙げた数列です。階差数列は，

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

となっており，初項 1，公差 1 の等差数列です。よって，階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n = n$。

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき，定理「階差数列と一般項」を用いると，

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k$$

となり，最後の $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k$ は例の公式を用いて書き換えることができます。ただし，上限が $n-1$ ですから，

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$$

であることに注意しましょう。

これで，$n \geqq 2$ の場合の n を用いた a_n の計算式が得られましたが，これが $n=1$ のときにも使えるかどうかは定かではありません。

そこで最後にそれを確認します。

解答例　階差数列は，

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

で，初項１，公差１の等差数列。よって，階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n = n$。

ゆえに，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 2 + \frac{1}{2}n(n-1) \\ &= \frac{n^2 - n + 4}{2} \end{aligned}$$

この式で $n = 1$ とすると，

$$\frac{1^2 - 1 + 4}{2} = 2$$

となり，初項に一致する。

よって，

$$a_n = \frac{n^2 - n + 4}{2} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 256 数列

$$1,\ 2,\ 6,\ 15,\ 31,\ 56,\ \cdots$$

の一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

22.4.5　いろいろな数列の和

例題 97 次の和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

解説　階差数列の考え方は，

$$b_k = a_{k+1} - a_k$$

であることから，b_k を足し合わせていくと，初項と末項以外が次々と打ち消されてしまうという，特徴をうまく用いたものです。

このような性質を持つ数列は，多少形が複雑でも一般項を求めることができます。そのような例が，本例題です。

与えられた式の形から第 k 項が

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

であることは，すぐにわかります。

しかしこれを足し合わせる公式を我々は知りません。

そこで工夫が必要となりますが，今の場合，

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

と変形できます。

第 18 章で，恒等式の話をしたときに，**部分分数分解** という考え方を紹介しました。その手法を用いるのです。 **部分分数分解**

あのときには，

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{a}{2k-1} + \frac{b}{2k+1}$$

を満たす $a,\ b$ を求めたのでした。

実行すると，

$$a = \frac{1}{2},\quad b = -\frac{1}{2}$$

であることがわかり，上のような変形ができることが結論できます。

さて，これを用いると，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)
\end{aligned}$$

となります。

ここで，最後の式を $\sum$ を用いない形で書き直すと，次々に打ち消され，簡単な形になります。

解答例　まず，

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

である。よって，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2n+1} \right\} \\
&= \frac{n}{2n+1}
\end{aligned}
$$

(解答例終)

練習 257 次の和を求めよ。

$$
\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}
$$

22.5　漸化式と数学的帰納法 —— 帰納的な考え方

22.5.1　漸化式と数列

等差数列の定義は，

$$
a_{n+1} - a_n = d \quad (\text{一定})
$$

であり，等比数列の定義は，

$$
\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (\text{一定})
$$

でした。

これらを書き直すと，等差数列は，

$$
a_{n+1} = a_n + d
$$

等比数列は，

$$
a_{n+1} = r a_n
$$

となります。

いずれも a_n と a_{n+1} の間の関係式になっていることに注意してください。

また与えられた関係式が同じでも，初項が異なれば異なる数列になります。

たとえば，関係式が $a_{n+1} = a_n + 2$ で与えられる公差 2 の等差数列であっても，初項が 1 なら，

$$
1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots
$$

となるのに対して，初項が -2 なら，

$$-2,\ 0,\ 2,\ 4,\ \cdots$$

となり，異なる数列が得られます。

等差数列や等比数列でなくても，一般の数列 $\{a_n\}$ は，初項の値と，第 n 項 a_n と第 $n+1$ 項 a_{n+1} の間の関係式が与えられると，初項から第 2 項，第 3 項というように順に値が決まります。

具体的な例で説明しましょう。

例　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ という関係式を満たす数列 $\{a_n\}$ を考えましょう。

$n = 1$ とすると $n + 1 = 2$ なので，関係式から，

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5$$

となり，第 2 項が計算できます。次に $n = 2$ とすると，$n + 1 = 3$ なので

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 5 + 2 = 17$$

で，第 3 項が決まります。

以下同様の計算によって，

$$5,\ 17,\ 53,\ \cdots$$

という数列が決まります。　**(例終)**

このように，初項の値と，第 n 項 a_n と第 $n+1$ 項 a_{n+1} の間の関係式を与えることによって数列 $\{a_n\}$ を定義することを，数列の**帰納的定義**といいます。　**帰納的定義**

また，項の間の関係式を **漸化式**（ぜんか）といいます。　**漸化式**

つまり上の例の $a_{n+1} = 3a_n + 2$ が漸化式です。

注意　上では a_{n+1} と a_n の間の関係式，つまり漸化式が与えられる例を挙げましたが，何も 2 項間の関係式だけが漸化式ではありません。

たとえば，

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という関係式で数列を定義しても構わないのです。しかしこの場合は，初項と第 2 項が与えられないと，数列は決まりません。

たとえば $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ とし，上の漸化式で定義される数列は，

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \cdots$$

となります。

これはよく知られている数列で **フィボナッチの数列** と呼ばれています。　**フィボナッチの数列**

この数列と自然現象は密接な関係があることが知られています。是非調べておいてください。　**(注意終)**

練習 258 次の漸化式で定義される数列のはじめの 5 項を書け。
(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
(2) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + 2n - 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

さて，漸化式で決まる数列の一般項を求めることをやりましょう。もちろんいつでもできるわけではなく，ここまでに紹介した方法で比較的簡単に計算できるものだけを扱います。

例題 98 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = -2a_n + 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説　漸化式が $a_{n+1} = pa_n + q$ の形で与えられる数列は，ここで紹介するテクニックで一般項を求めることができます。
実際，このような数列は

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

の形に変形できるからです。
一度このような形に変形できれば，新しい数列 $b_n = a_n - \alpha$ が公比 p の等比数列であることがわかりますので，b_n の一般項を求めるのは簡単です。
では，どうやって α を求めたらいいでしょう。
それは難しく考えず，もし $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形できたら α はどんな数でなければいけないか，を計算すればよいのです。
本例題の場合，

$$a_{n+1} - \alpha = -2(a_n - \alpha)$$

となり，右辺を展開すると，

$$a_{n+1} - \alpha = -2a_n + 2\alpha \cdots (1)$$

一方 $a_{n+1} = -2a_n + 3 \cdots (2)$ でしたから，(2) − (1) を作ると，

$$\alpha = -2\alpha + 3$$

を得ます。これを解けば α が求められ，目標とした式変形ができることがわかります。

注意　上の解説で得られた α に関する方程式 $\alpha = -2\alpha + 3$ は漸化式の a_{n+1} や a_n を α で置き換えたものになっていることに注意してください。一般の $a_{n+1} = pa_n + q$ でやってみても同様ですので，いつでもこの方程式を解けば，ここで紹介した変形を実現する α の値が計算できます。 **(注意終)**

解答例　漸化式 $a_{n+1}=-2a_n+3$ は,

$$a_{n+1}-1=-2(a_n-1)$$

と変形できる。

これは数列 a_n-1 が

$$\text{初項 } a_1-1=2,\ \text{公比 } -2 \text{ の等比数列}$$

であることを示している。

よって,

$$a_n-1=2\times(-2)^{n-1}$$

ゆえに,

$$a_n=2\times(-2)^{n-1}+1 \ \cdots\textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 259 $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

例題 99 $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n^2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解説　漸化式から，簡単に一般項が求められる例をもう一つやりましょう。

本例題では，まず右辺にある a_n を移項しましょう。すると，

$$a_{n+1}-a_n=n^2$$

という式が得られますが，この左辺は数列 $\{a_n\}$ の階差数列の形をしています。

ということは，538 ページで紹介した，階差数列を用いた一般項の求め方が使えます。

解答例　漸化式より,

$$a_{n+1}-a_n=n^2$$

よって，$n\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k^2\\&=1+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\\&=\frac{1}{6}\{6+n(n-1)(2n-1)\}\\&=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n+6)\\&=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)\end{aligned}$$

この式で $n=1$ とすると，

$$\frac{1}{6}\times(1+1)\times(2\times 1^2-5\times 1+6)=1$$

となって，a_1 に等しい。

つまり

$$a_n=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2-5n+6)\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 260 $a_1=3, a_{n+1}=a_n+2n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

22.5.2 数学的帰納法

漸化式

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列を考えましょう。

この数列の一般項は，前節で紹介した方法では求められません。

そこで，ひとまずはじめのいくつかの項を計算してみることにしましょう。以下に計算してみますが，見る前にみなさん自身でも計算してみておいてください。

$$\begin{aligned}
&a_1=0\\
&a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{1}{2-0}=\frac{1}{2}\\
&a_3=\frac{1}{2-a_2}=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\\
&a_4=\frac{2}{2-a_3}=\frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\\
&\cdots
\end{aligned}$$

さて，この結果を見たとき，a_5 がいくつになるか，すぐに予想できるでしょうか?

そうですね。$\frac{4}{5}$ となるだろうことが，予想できます。

念のために a_5 を計算し，確かめてください。

それでは以上のことから，一般項はどうなると考えられますか?

そう，

$$a_n=\frac{n-1}{n}$$

となりそうですね。

この予想は正しいのでしょうか?

数学にはこういったことを証明するテクニックがあります。それが本節で紹介する **数学的帰納法** という証明方法です。 **数学的帰納法**

これは次のようにします。

定理 (数学的帰納法) 自然数 n に関する命題 $P(n)$ が すべての自然数 n について成り立つことを証明するには，次の (I), (II) を示せばよい。

(I) $n=1$ とした命題 $P(1)$ は成り立つ。

(II) $n=k$ とした命題 $P(k)$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときの命題 $P(k+1)$ が成り立つ。

大分複雑に感じられますね。しかし鋭い読者は，上の二つの項目が漸化式による数列の定義，帰納的な定義と同種のものであることを感じとっているかもしれません。その感覚は正解です。

では，なぜこのような方法で証明できたことになるのか，簡単に説明しておきましょう。

まず (I) は $n=1$ のとき命題が成り立つことを確かめよ，といっています。

数学的帰納法での証明の出発点が確かに大丈夫であることを確認しているわけです。

(II) は大分込み入っていますが，まずは $n=k$ のとき命題が正しいことを「仮定」しようということからはじめています。この仮定が真であるとしたときに，$n=k+1$ のときの命題が正しいことを確かめよ，といっているわけです。

すると，(I) で $n=1$ のとき命題は真なので，(II) で $n=k$ の k が 1 の場合を考えると，仮定が確かに成り立っていますから，$n=k+1$，つまり $n=2$ の場合が正しいと結論できることになります。

$n=2$ の場合の命題が真なら，再び (II) を用いて，$n=3$ の場合が真であることが結論できます。

以下この議論はどこまでも繰り返すことができますから，n がどんな自然数であっても命題が成り立つことが確かめられます。

上の議論は順に確かめていくことになり，一方自然数は無数にあるので無限の時間がかかるように感じられますが，数学では一瞬にして確認できたと考えるわけです。

注意 数学的帰納法の感覚的な正しさは，上のような説明で納得してもらえると思います。

しかし，厳密な証明には自然数の定義である「ペアノの公理」 が必要になります。それゆえ，省略します。 **ペアノの公理**

興味のある人は，第 4 章の「さらに勉強するために」で紹介した彌永先生の本を見てください。 **(注意終)**

具体的な例で，数学的帰納法の使い方をお見せしましょう。

例題 100 等式

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

がすべての自然数に対して成り立つことを，数学的帰納法で証明せよ。

解説　定理「数学的帰納法」の手順どおりにやっていきます。

まず (I) です。これは $n=1$ のとき等式が成り立つことを示せばいいのですから，左辺は左辺，右辺は右辺にそれぞれ $n=1$ を代入して，等しくなることを確かめればいいわけです。

次に (II) ですが，まずは $n=k$ の等式が成り立つと仮定するわけです。その場合を書き下すなら，

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

となります。単に与えられた等式の n を k に書き換えたに過ぎません。で，これが成り立つとして $n=k+1$ の場合が正しいことを証明します。

生徒諸君を指導していて，ここで何を証明すればいいのかよくわからないことがよくあるようです。

その対策として，与えられた等式の $n=k+1$ 版をメモしてみるといいでしょう。

今の場合，

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\cdots(*)$$

となります。右辺は，$\dfrac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}=\dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)$ のようにさらに書き換えておく方がいいでしょう。

さて，$(*)$ を証明することが目標になりました。これはどうやれば証明できるでしょう。

まず左辺は $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$ であり，ここに $1+2+3+\cdots+k$ という仮定の左辺があることに注目します。

ということは，この部分は仮定を用いて書き換えられます。あるいは，仮定の両辺に $k+1$ を加えてもいいですね。解答例ではこの変形方法を用いています。

よって，

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

という等式が得られます。

あとはこの右辺が $\dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)$ に等しいことを確かめればいいわけです。

両方とも展開して等しいことを確かめてもいいのですが，せっかく因数分解された形になっていますから，$\dfrac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$ を因数分解することを考えた方がやりやすいでしょう。まずは共通因数 $k+1$ でくくれます。また特に今の場合

$\dfrac{1}{2}$ という係数もありますから，これもいっしょにくくっておいた方が計算しやすくなるでしょう。

あとは解答例をよく見てください。

解答例　(I) $n=1$ のとき，

$$(\text{左辺})=1,\quad (\text{右辺})=\frac{1}{2}\times 1\times(1+1)=1$$

よって，与えられた等式は成り立つ。

(II) $n=k$ のとき，与えられた等式が成り立つとすると，

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

この両辺に $k+1$ を加えると，

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

となるが，

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\end{aligned}$$

なので，

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

これは，与えられた等式が $n=k+1$ のときにも成り立っていることを示している。

(I)，(II) によって，与えられた等式はすべての自然数 n に対して成り立つ。

(解答例終)

練習 261 等式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

がすべての自然数に対して成り立つことを，数学的帰納法で証明せよ。

例題 101 漸化式

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義される数列について以下の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 を求め，一般項 a_n を推定せよ。
(2) その推定が正しいことを，数学的帰納法によって証明せよ。

解説　本節の冒頭で取り上げた漸化式です。
(1) はすでに計算していますから，いいでしょう。
(2) は，推定が正しいことを数学的帰納法で証明せよ，という問題です。
手順どおりに，まず $n=1$ の場合を確認し，次に $n=k$ のとき正しいとして $n=k+1$ でも成り立つことを確かめます。このステップで，漸化式を用いることになります。

解答例　(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 = \frac{0}{1} \\ a_2 &= \frac{1}{2-a_1} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1}{2-a_2} = \frac{1}{2-\dfrac{1}{2}} = \frac{2}{3} \\ a_4 &= \frac{2}{2-a_3} = \frac{1}{2-\dfrac{2}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって，

$$a_n = \frac{n-1}{n} \cdots (*)$$

と推定できる。
(2) (I) $n=1$ のとき，題意より $a_1=0$ であり，一方，式 $(*)$ の右辺は

$$\frac{1-1}{1} = 0$$

よって，$(*)$ は $n=1$ のとき成り立つ。
(II) $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定すると，

$$a_k = \frac{k-1}{k}$$

さて，

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{1}{2-a_k} \\
&= 1 \div \left(2 - \frac{k-1}{k}\right) \\
&= 1 \div \frac{k+1}{k} \\
&= \frac{k}{k+1} \\
&= \frac{(k+1)-1}{k+1}
\end{aligned}
$$

よって，$n = k+1$ のときにも $(*)$ は成り立つ。

(I)，(II) より，$(*)$ はすべての自然数について成り立つ。 **(解答例終)**

練習 262 漸化式 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{4-a_n}{3-a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

22.6　さらに勉強するために

数列は，微分積分や実数論と深い関係があります。

実際，実数の厳密な定義は有理数からなる数列の極限として定義できます。その一端は，次章の「指数，対数」でほんの少しだけ垣間見えるでしょう。

また，高校の数学ではそこまでいきませんが，関数の級数展開などを実行するときには漸化式が自然に現れますし，いくつかの問題を解決するには数列の和 (およびその極限) を計算する必要が出てきます。

最後に取り上げた「数学的帰納法」は今後何度も現れるでしょうし，これまでも多くの注で,「厳密には数学的帰納法により証明されます」と何度も書いてきました。ここまでの内容を振り返って，数学的帰納法で証明できるものは，練習としてやってみるといいでしょう。