第23章　指数，対数

23.0　はじめに

数 a を n 個かけあわせたものを a^n と書くのでした。こういった形の数の計算について，次の定理が成り立ちました。

定理 (指数法則) **指数法則**

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$
(3) $(ab)^n = a^n b^n$
(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (ただし $m > n$ とする。)

本章の前半は，この法則が主役です。

この「指数法則」で m や n は自然数でした。本章ではこの条件を緩めていきます。

まずは負の整数まで含めた 整数 まで。次に 有理数 と，第4章で数の範囲を拡げてきたのと同様に話を進めていき，最終的には実数，複素数まで拡げます。

理論的な制限から，実数指数，複素数指数の定義はお話程度にしかできません。しかし結論は自由に使ってもらって大丈夫です。

本章の後半のテーマは「対数」です。

指数の計算と，対数の計算は裏表 (逆の計算) になっています。慣れると非常に便利な計算方法ですので，是非習得してください。

最後の節で，指数関数と対数関数について簡単に触れました。指数として実数を考えられるようになったために，このような考え方ができるようになったことに注意してください。

関数としてのより詳しい性質を調べるには，微分積分の考え方が必要になります。しかし，次章で扱う三角関数とともに，自然現象を記述するときに欠かせない関数なので，ひとまずここで紹介しておきました。

そろそろ，証明を簡略に書いていきます。自分で詳しく補っていく練習をしてください。

23.1　累乗根の定義

「はじめに」で，前半は「指数法則」が主役ですと書きましたが，一見異なる話からはじめましょう。

平方根の一般化からです。まずは定義を見てください。

定義 (n 乗根)　a を実数，n を自然数とする。このとき，n 乗すると a となる数を，a の n **乗根** という。 **(定義終)**　n **乗根**

注意　通常 2 乗根を「平方根」，3 乗根を「立方根」といいます。 **(注意終)**　**平方根**　**立方根**

例　$3^4 = 81$ なので，81 の 4 乗根は 3。
また，$(-3)^4 = 81$ なので，-3 も 81 の 4 乗根。 **(例終)**

例　$(-2)^3 = -8$ なので，-8 の立方根は -2。 **(例終)**

注意　ここに挙げた例，あるいはこの後にでてくるいろいろな計算において，3 乗根や 4 乗根，それ以上の n 乗根をみつけるのは慣れないと容易ではないかもしれません。しかし，与えられた数を素因数分解をすると比較的みつけやすくなるでしょう。具体的なものを後の例でやってみせます。 **(注意終)**

正の数の平方根は，二つありました。累乗根にも似た性質がありますが，n によって状況がかわります。

上の例で見るなら，4 乗根は二つあるのに対して，3 乗根は一つしかありません。

この状況は一般化でき，n が偶数のときと，奇数のときでは n 乗根の個数が異なることが説明できます。

定理 (n 乗根の個数)
(1) n が奇数のとき
a の正負に関わらず，a の n 乗根はただ一つある。
(2) n が偶数のとき
$a > 0$ ならば，a の n 乗根は正のものと負のものの二つがある。$a < 0$ ならば，a の n 乗根は存在しない。

この結果は $y = x^n$ のグラフを描けば，納得できるでしょう。

問 139　$y = x^n$ のグラフを描いて，定理「n 乗根の個数」を確認せよ。

注意　「代数学の基本定理」を覚えている人は，上のことに疑問を持つかもしれません。
実際，a の n 乗根は，方程式 $x^n = a$ の解ですから，複素数の世界で考えると n 個存在するはずです。

その疑問は正しく，後で複素数の世界での n 乗根のお話をするつもりですが，そこで実際に a の n 乗根がちょうど n 個あることがわかります。

しかしここでの話は，実数の世界だけに限っていますので，このような状況が生じているのです。

本章では，特に断らない限り，実数の世界で話を進めます。 **(注意終)**

練習 263 次の値を求めよ。

(1) -8 の 3 乗根　(2) 16 の 4 乗根　(3) -81 の 4 乗根　(4) 32 の 5 乗根

定理「n 乗根の個数」をもとに次のように記号の意味を定めます。n が偶数のときの定義は，$\sqrt{a}$ のものと同様であることに注意してください。

定義 ($\sqrt[n]{a}$ の定義)

(1) n が奇数のとき，ただ一つある a の n 乗根を $\sqrt[n]{a}$ と表す。

(2) n が偶数で，$a > 0$ のとき，a の n 乗根のうち正のものを $\sqrt[n]{a}$ と表す。

(定義終)

注意　この定義から，n が偶数で $a > 0$ のとき，a の n 乗根のうち負のものは $-\sqrt[n]{a}$ と表すことができます。つまり n が偶数で $a > 0$ のとき，a の n 乗根は $\pm\sqrt[n]{a}$ となります。

これも平方根のときと同様です。

また，$\sqrt[2]{a}$ は今までどおり $\sqrt{a}$ と書きます。 **(注意終)**

例　$\sqrt[3]{-125} = -5$　　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} = \dfrac{1}{3}$　　$\sqrt[5]{243} = 3$ **(例終)**

注意　$\sqrt[5]{243}$ はすぐに 3 と答えられないと思います。こんなときには 243 を素因数分解しましょう。すると $243 = 3^5$ であることがわかり，答えを得ます。 **(注意終)**

練習 264 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[4]{16}$　(2) $\sqrt[6]{729}$　(3) $\sqrt[3]{-64}$　(4) $\sqrt[3]{125}$

23.2　累乗根の性質

　累乗根の持つ性質を列挙しましょう。

定理 (累乗根の性質)　$a > 0,\ b > 0$ で，$m,\ n$ を自然数とするとき，次が成り立つ。

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},\quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(2) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

注意　(1) は，平方根の持つ性質 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ などの類似です。

　また，$a,\ b$ のいずれも「正」としていますので，n が奇数のときでも $\sqrt[n]{a}$ は正になっていることに注意してください (次の証明の中で特に断らずに用いています)。　**(注意終)**

証明　(1) 左辺を n 乗すると，

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$$

また，右辺を n 乗すると，

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$$

よって，

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

(証明終)

問 140　定理「累乗根の性質」の残りの性質を証明せよ。

例

$$\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\left(\sqrt[6]{9}\right)^3 = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{729} = 3$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{12}}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$$

(例終)

注意　ここでは，素直に定理を用いてみせましたが，これらも素因数分解しておいた方が計算しやすいかもしれません。たとえば，

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{12}\sqrt[3]{18} &= \sqrt[3]{2^2 \times 3}\sqrt[3]{2 \times 3^2} \\
&= \sqrt[3]{(2^2 \times 3) \times 2 \times 3^2} \\
&= \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} \\
&= \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{3^3} \\
&= 2 \times 3 = 6
\end{aligned}$$

実際の計算をするときには，こんなに丁寧にやる必要はありません。暗算できるところでは，どんどん暗算してください。 **(注意終)**

練習 265 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}$　　(3) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$　　(4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

一つ問いを出しておきます。この公式は後で必要になります。

問 141 $a > 0$ かつ m, n, p が自然数のとき，次が成り立つことを証明せよ。

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

例題 102

$$\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128} + 3\sqrt[3]{2}$$

を簡単にせよ。

解説　累乗根の計算の練習をしましょう。同様の計算を平方根のときにやっています。平方根のときにはどうやったのか，思い出しながら，以下の解説を読んでください。

さて，与えられた式の各項は少し複雑です。こんなときには，定理「累乗根の性質」を用いて，できるだけ根号の中を小さくしてみるのが定石です。

まず，$\sqrt[3]{16}$ ですが，$16 = 2^4$ であることに注意しましょう。今考えている数は 3 乗根ですから，2^4 を $2^3 \times 2$ とわけて考えましょう。すると，

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \times 2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

と変形できます。

$\sqrt[3]{128}$ も同様に変形すると，$\sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2}$ を得ます (各自確かめてください!)。

後は，平方根や文字の式のときと同じようにして，同類項をまとめます。

解答例

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 2\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[3]{2} \ \cdots \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(解答例終)

練習 266 次に式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81}$　　(2) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{128}$

23.3　指数の拡張

23.3.1　整数への拡張

さあ，それでは本章の本題である指数の拡張の話を始めましょう。

ここまで，指数は **自然数** でした。「はじめに」にも書きましたように，これから指数を (最終的には) 実数まで拡げていきます。

第 4 章でお話ししたように，我々は自然数→整数→有理数→実数と数の範囲を拡張してきました。

指数も最終的には実数まで拡張したいのですが，一度にやるのは大変なので，まずは 0 や負の整数を含む **整数** まで指数の考え方を拡げましょう。その際の手がかりとなるのが「指数法則」です。

そのためにまず次のような考察をしてみます。

$a \neq 0$ とし，指数法則 $a^m a^n = a^{m+n}$ が $m = 1,\ n = 0$ の場合にも成り立つとしましょう。このとき，

$$aa^0 = a$$

となり，両辺を a で割れば，

$$a^0 = 1$$

を得ます。

また，指数法則 $a^m a^n = a^{m+n}$ が $m = -n$ の場合にも成り立つとすると，

$$a^{-n}a^n = a^0 = 1$$

すなわち，

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

となります。

ここで，ひとまず指数法則が 0 や負の整数でも成り立つという前提で議論していることに注意してください。話の順番は逆になっていますが，この結果は，0 や負の整数の指数をどう定義すればよいかの手がかりを与えてくれています。

注意　同じような議論のしかたが，複素数の定義を考えるときにも現れていましたね。
(注意終)

そこで次のように定義します。

定義 (負の数の指数)　$a \neq 0$, n を自然数とするとき，

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

と定める。また，$a^0 = 1$ と約束する。 **(定義終)**

注意　n は自然数なので $-n$ は負の整数になっていることに注意してください。
また，$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ です。つまり a^{-1} は a の逆数になっています。このことは，頭の隅においておいてください。 **(注意終)**

複素数のときと同様で，この定義が指数法則とうまくマッチするかどうかが問題となります。
幸いにして次の指数法則が成り立ちます。

定理 (指数法則)　$a \neq 0$, $b \neq 0$ で，m, n を整数とするとき，次が成り立つ。 **指数法則**
(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$
(2) $(a^m)^n = a^{mn}$
(3) $(ab)^n = a^n b^n$

注意
(1) 指数である m や n の仮定が「整数である」となったことと，$a \neq 0$, $b \neq 0$ 以外は，552 ページの定理「指数法則」とほぼ同じ内容です。a などから 0 を除外したのは，これらが分数の分母になることがあるからです。
(2) 負の数の指数の定義によって，552 ページの定理「指数法則」の (4) は不要となります。実際，

$$a^m \div a^n = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n}$$

なので，(1) が成り立てば，(4) が成り立つことがわかります。
さらに，$m > n$ という条件も不要となります。

(注意終)

問 142　「さらに，$m > n$ という条件も不要となります」を確かめよ。

証明　(I) $m \geqq 0$, $n \leqq 0$，(II) $m \leqq 0$, $n \geqq 0$，(III) $m \leqq 0$, $n \leqq 0$ の三つの場合について，それぞれが成り立つことを証明すればよい。
(I) のみを証明し，残りは読者の演習とする。
$n \leqq 0$ なので，自然数 n' を用いて，$n = -n'$ と表すことができる。

(1) まずは $m \geqq n'$ の場合を考える。

$$a^m \times a^n = a^m \times a^{-n'} = a^m \times \frac{1}{a^{n'}}$$

今 $m \geqq n'$ なので，$a^m \times \dfrac{1}{a^{n'}} = a^{m-n'}$。最後の値は a^{m+n} に等しい。よって，

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$m < n$ の場合も同様。

(2)

$$(a^m)^n = (a^m)^{-n'} = \frac{1}{(a^m)^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}} = a^{-mn'} = a^{m\times(-n')} = a^{mn}$$

(3)

$$(ab)^n = (ab)^{-n'} = \frac{1}{(ab)^{n'}} = \frac{1}{a^{n'}b^{n'}} = \frac{1}{a^{n'}} \times \frac{1}{b^{n'}} = a^{-n'}b^{-n'} = a^n b^n$$

(証明終)

問 143 $m,\ n$ が整数の場合の定理「指数法則」の残りの場合を証明せよ。

例

(1) $x^{-5}x^{-4} = x^{-9}$
(2) $(x^2)^{-3} = x^{-6}$
(3) $(a^2b^{-1})^3 = a^6b^{-3}$

(例終)

練習 267 次の式を簡単にせよ。

(1) $a^2 \times a^{-5}$　(2) $(a^{-2})^{-4}$　(3) $(a^{-2}b^3)^{-2}$
(4) $x^5 \times x^2 \div x^4$　(5) $(a^2)^3 \times a^{-6}$　(6) $(a^2)^{-5} \times a^2$

練習 268 次の値を計算せよ。

(1) 4^{-2}　(2) $(-5)^0$　(3) $3^4 \times 9^{-3}$
(4) $2^{-3} \div 8^{-2}$　(5) $\{(-1)^{-3}\}^5$　(6) $(45^{10})^{-30} \times (45^{30})^{10}$

23.3.2　有理数への拡張

さて，次の段階として指数を有理数の場合まで拡張しましょう。ここでも，手がかりは指数法則であり，本章の始めにお話しした累乗根が関係してくることがわかります。

$a > 0$ とし，指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ が m が分数のときにも成り立つと仮定しましょう。m は分数なので $m = \dfrac{q}{p}$ と表すことができます。ここで $p,\ q$ は整数であることに注意してください。

このとき，

$$\left(a^{\frac{q}{p}}\right)^p = a^{\frac{q}{p}\times p} = a^q$$

となります。

これは，$a^{\frac{q}{p}}$ が a^q の p 乗根であることを示しています。つまり，

$$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$$

そこで，次のように定めます。

定義 (分数の指数)　$a > 0$，q が整数，p が正の数であるとき，

$$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$$

と定める。特に

$$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$$

(定義終)

注意　(難しい内容を含んでいるので，初読では飛ばしてもよい)

ちょっと細かいことですが，一つ大きな問題があります。それは約分に関することです。

分数では，

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

と約分ができます。そして，二つの分数 $\dfrac{2}{6}$ と $\dfrac{1}{3}$ に対して，$a^{\frac{2}{6}}$ と $a^{\frac{1}{3}}$ が定義できます。

このとき $a^{\frac{2}{6}}$ と $a^{\frac{1}{3}}$ は等しいでしょうか?

もしこの二つの値が異なるとすると，分数指数を定義することはできません。

幸いにして，この場合もうまくいっています。それを保証するのが，556 ページの問いで示した等式，

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

です。

実際，

$$a^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[2\times 3]{a^{1\times 3}} = \sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

となり，$a^{\frac{2}{6}}$ と $a^{\frac{1}{3}}$ が等しいことが示せます (三番目の等式のところで上の公式を用いました)。

上の計算は，一般化でき，

$$\frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$$

と約分できる場合の証明に書き換えることができます。 **(注意終)**

問 144 上の証明の書き換えを実行せよ。

今度も，このような定義から指数法則が導けるかどうかが問題になります。

そして今度も幸いにして，次の定理が成り立ちます。

定理 (指数法則) $a > 0,\ b > 0$ で，$r,\ s$ を有理数とするとき，次が成り立つ。 **指数法則**

(1) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

(2) $(a^r)^s = a^{rs}$

(3) $(ab)^r = a^r b^r$

注意 $a > 0,\ b > 0$ 以外の条件は，これまでの定理「指数法則」と同様です。指数の正負によって，負の数の累乗根は存在したりしなかったりしました。定理を簡明にするためにこの条件をおいています。 **(注意終)**

証明 $r,\ s$ は有理数なので，$r = \dfrac{n}{m},\ s = \dfrac{n'}{m'}$ とおくことができる。

$$\begin{aligned}
a^r \times a^s &= a^{\frac{n}{m}} \times b^{\frac{n'}{m'}} \\
&= \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[m']{a^{n'}} \\
&= \sqrt[mm']{a^{m'n}} \times \sqrt[mm']{a^{mn'}} \\
&= \sqrt[mm']{a^{m'n} \times a^{mn'}} \\
&= \sqrt[mm']{a^{m'n+mn'}} \\
&= a^{\frac{m'n+mn'}{mm'}} \\
&= a^{\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}} \\
&= a^{r+s}
\end{aligned}$$

(証明終)

注意 証明の中で，累乗根に関する性質を縦横に用いていることをよく味わってください。 **(注意終)**

問 145 定理「指数法則」の残りを証明せよ。

例

(1) $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$

(2) $2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}}$

(3) $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2 = a^{\frac{1}{4}\times 2} = a^{\frac{1}{2}}$

(4) $\left(9^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 9^{\frac{1}{4}\times 2} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

(5) $(a \times b^3)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times (b^3)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \times b$

(6) $54^{\frac{1}{3}} = (2 \times 3^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 3 = 3\sqrt[3]{2}$

(例終)

上の例では，同様の指数の文字式と数の計算を並列してみました。それぞれについて，よく観察してください。

練習 269 次の式を簡単にせよ。

(1) $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \div a^{\frac{1}{4}}$　　(2) $6^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{3}{4}} \div 6^{\frac{1}{4}}$

(3) $(a^3 b)^{\frac{1}{2}} \div (ab^2)^{\frac{1}{3}}$　　(4) $24^{\frac{1}{2}} \div 18^{\frac{1}{3}}$

23.3.3 実数への拡張

注意：初読の際は途中にでてくる定理以外の部分は飛ばして読んでよい。

これで指数が有理数の場合でも，計算できるようになってきました。

最終的には指数として無理数も考え，実数まで拡張したいわけです。より広く複素数を指数として考えられるようになると，理論的にも十分になります。

実数への拡張

たとえば $a^{\sqrt{2}}$ はどのように定義したらいいでしょうか。

これは，実数というものをどのように考えるのか，によって変わってきます。

第 4 章で，実数の定義として次のものを採用しました。

定義 (実数)　小数で表わすことのできる数を **実数** という。　**(定義終)**　**実数**

そして，後で勉強する「極限」の考えを用いると，次の定理が証明できることが知られています。　**極限**

定理 (実数の有理数近似)　任意の実数 α に対して，有理数の列 $\{a_n\}$ で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

となるものが存在する。

この定理から，$\sqrt{2}$ に対しても，$a_n \to \sqrt{2}$ となる有理数の列 $\{a_n\}$ が存在することがわかります。この数列 $\{a_n\}$ を用いて

$$a^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} a^{a_n}$$

と定義することができます。

実際，右辺の a^{a_n} は a_n が有理数であることから，必ず値が見つかり新しい数列 $\{a^{a_n}\}$ ができるのでその極限を考えることができます。

もちろん右辺が収束する，つまり極限が存在することは証明しなければいけません。

さらに，$\sqrt{2}$ に収束するような有理数の列 $\{a_n\}$ は一つとは限りません (実は無数にあることがわかります)。

つまり $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ となるような別の有理数の数列 $\{b_n\}$ が存在します。これに対して，

$$\lim_{n\to\infty} a^{a_n} = \lim_{n\to\infty} a^{b_n}$$

となることも証明する必要があります。

こうなると，実数を厳密に定義する必要が出てきますし，それに関するさまざまな理論が必要となります。

先にも書きましたように，この理論は「実数論」として完成しており，大学の数学科で学習することができます。また，これも先に紹介した高木先生の「解析概論」(岩波書店) には二通りの実数の定義が紹介され，理論が展開されています。

そしてここでも重要なことは，指数が実数であっても「指数法則」が成り立つことです。つまり次の定理が成り立ちます。

定理 (指数法則) $a > 0,\ b > 0$ で，$x,\ y$ を実数とするとき，次が成り立つ。 **指数法則**

(1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

(2) $(a^x)^y = a^{xy}$

(3) $(ab)^x = a^x b^x$

指数を実数まで拡げておくと，$y = a^x$ というような関数を考えることができます。これを指数関数といいますが，本章の後半で紹介する対数を関数と考えた「対数関数」と，三角比を関数として考えた「三角関数」をあわせて **初等関数** と呼ばれ，自然科学や工学では基本的な関数になっています。 **対数関数** **三角関数** **初等関数**

また，指数は複素数へも拡張できます。

23.4 累乗の大小

以上で，指数計算についての大体のお話が終わりました。

次の対数計算の話にはいる前に，表題に挙げたもう一つの話題を扱っておきましょう。

これについては，次の定理が成り立ちます。

定理 (累乗の大小)

(1) $a > 1$ のとき，$x > y \Longleftrightarrow a^x > a^y$
(2) $0 < a < 1$ のとき，$x > y \Longleftrightarrow a^x < a^y$

a が 1 より大きい場合と，a が 0 と 1 の間にあるときでは結論の不等号の向きが違うことに注意してください。

$x,\ y$ が実数の場合には，実数論が必要になりますので省略し，有理数の場合にのみ証明を与えておきます。ちょっと長くなりますが，以下の議論を追いかけてみてください。先を急ぐ人は，次に挙げている例題に進んでも構いません。

$a > 1$ の場合を考えましょう。

まず $0 < m$ を整数，つまり自然数とします。このとき，$1 < a^m$ であることがわかります。

実際，a は正の数のなので，$a > 1$ の両辺に a をかけても不等号の向きはかわりません。よって，$a^2 > a$。

またこの式の両辺に再び a をかけることで $a^3 > a^2$ を得ます。

これをくりかえすことによって，

$$1 < a < a^2 < a^3 < \cdots < a^m$$

となり，一番左と一番右を見れば，

$$1 < a^m$$

を得ます (厳密には「数学的帰納法」を用います)。

問 146 $a > 1$ であるとき，$1 < a^m$ となることを数学的帰納法で証明せよ。

これから $0 < m < m'$ のとき，

$$a^m < a^{m'}$$

であることもわかります。

また $1 < a^m$ の両辺を a^m で割ると

$$\frac{1}{a^m} < 1$$

よって，

$$a^{-m} < 1$$

つまり n が負の整数であるとき，

$$a^n < 1$$

がわかります。

また，以上のことをまとめると $m,\ n$ が整数で $m < n$ なら ($m,\ n$ の正負に関わらず) $a^m < a^n$ であることがわかります。

問 147 確かめよ。

次に $r,\ s$ が有理数のときには，次の定理を用います。

定理 (正の数の累乗の大小)　$a > 0,\ b > 0$ のとき，

$$a > b \iff a^n > b^n$$

この定理は第 18 章で紹介しました (証明はみなさんにお任せしました)。
この定理は次のように書くこともできます。

定理 (正の数の累乗根の大小)　$a > 0,\ b > 0$ のとき，

$$a > b \iff \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

実際，$a = (\sqrt[n]{a})^n$ ですから，定理「正の数の累乗の大小」から結論を得ます。

問 148 きちんと証明を書き下せ。

さて，$r = \dfrac{n}{m},\ s = \dfrac{n'}{m'}$ (ただし，分母は正) とします。$r > s$ とすると，$\dfrac{n}{m} > \dfrac{n'}{m'}$ で $m\ m'$ は正の数なので，$m'n > mn'$ を得ます。
$m'n,\ mn'$ は整数なので，既に得たことから，

$$a^{m'n} > a^{mn'}$$

そして両辺の mm' 乗根をとると，定理「正の数の累乗根の大小」から

$$a^{\frac{n}{m}} > a^{\frac{n'}{m'}}$$

を得ます。

問 149 きちんと証明を書き下せ。

問 150 $0 < a < 1$ の場合の証明を書き下せ。

(証明終)

例題 103 $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[5]{27}$ を小さい順に並べよ。

解説　いずれも 3^x の形に書けることに注意しましょう。そこで書き直してみます。すると，$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[5]{27} = 3^{\frac{3}{5}}$ であることがわかります。
今 3 は 1 より大きいので，定理「累乗の大小」から指数の大小がわかれば，与えられた数の大小が決まります。

解答例　与えられた数を変形すると，$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[5]{27} = 3^{\frac{3}{5}}$。

今，$3>1$ であり，

$$\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}$$

なので，

$$3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{3}{5}}<3^{\frac{2}{3}}$$

よって，

$$\sqrt{3}<\sqrt[5]{27}<\sqrt[3]{9}\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

補注　細かいことですが，解答例の中で「$3>1$ なので」と断っていることに注意してください。 **(補注終)**

練習 270 次の値を小さい順に並べよ。

(1) $\sqrt[3]{4},\ \sqrt{2},\ \sqrt[4]{8}$　　(2) $0.2^{\frac{1}{2}},\ 0.2^{-1},\ 0.2^{\frac{1}{3}}$

例題 104 不等式 $9^{2x+3}<729$ を解け。

解説　定理「累乗の大小」の使い方をもう一つ練習しましょう。左辺が 9^{2x+3} となっているので，右辺も 9 の何乗かの形になれば定理が使えます。もしそのように変形できなくても，$9=3^2$ ですから，両辺とも 3 の何乗かの形には確実に変形できます。

今の場合は $729=9^3$ と変形できるので，与えられた不等式は，

$$9^{2x+3}<9^3$$

となります。

$9>1$ ですから，定理「累乗の大小」の (1) が使えて，

$$2x+3<3$$

が得られ，これを解けば，x が求められます。

解答例　与えられた不等式は，

$$9^{2x+3}<9^3$$

と変形できる。

$9>1$ より，

$$2x+3<3$$

であり，これを解くと，

$$x<0\ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 271 次の不等式を解け。

(1) $4^{3x-2} > 256$ 　　　(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2x+1} \leqq \dfrac{1}{8}$

定理「累乗の大小」から次の系が得られます。

系 (累乗の相等) 　$a \neq 1,\ a > 0$ とする。このとき,

$$x = y \iff a^x = a^y$$

証明 　背理法で証明する。

$\Longrightarrow$) 　$a^x \neq a^y$ とすると，$a^x > a^y$ あるいは $a^x < a^y$ である。

$a^x > a^y$ とすると，$a > 1$ のときは $x > y$，$0 < a < 1$ のときは $x < y$ となり，いずれの場合も $x \neq y$ となり仮定に反する。

$a^x < a^y$ のときも同様。

$\Longleftarrow$) 　$x \neq y$ とすると，$x > y$ あるいは $x < y$ である。よって，$\Longrightarrow$) のときと同様の論法で，いずれの場合も $a^x \neq a^y$ となり，仮定に反する。 **(証明終)**

問 151 上の証明をより詳しく書き下せ。

例題 105 方程式 $4^{x+1} = \sqrt[3]{16}$ を解け。

解説 　不等式のときと同様に，まずは右辺を 4 の何乗かの形に変形しましょう。すると，$\sqrt[3]{16} = 4^{\frac{2}{3}}$ なので，与えられた方程式は,

$$4^{x+1} = 4^{\frac{2}{3}}$$

となることがわかります。

系「累乗の相等」より,

$$x + 1 = \frac{2}{3}$$

となりますので，後はこの方程式を解けばよいことになります。

解答例 　$\sqrt[3]{16} = 4^{\frac{2}{3}}$ なので，与えられた方程式は,

$$4^{x+1} = 4^{\frac{2}{3}}$$

よって,

$$x + 1 = \frac{2}{3}$$

これを解いて,

$$x = -\frac{1}{3} \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 272 次の方程式を解け。

(1) $2^{x+1} = 16$　　(2) $4^{-3x+1} = \dfrac{1}{16}$

23.5 対数の定義

続いて「対数」について解説しましょう。

先の節で累乗の指数を実数まで拡張しました。このとき，次の定理が成り立ちます。

定理 (指数の値域)　$a \neq 1,\ a > 0$ とする。x が実数全体を動くとき，a^x は正の実数全体で動く。

言い替えると次のことが成り立ちます。ただし，$a \neq 1,\ a > 0$ とします。このとき

任意の正の実数 M に対して，$a^r = M$ となる実数 r が必ず存在する。

そこで次のように定義します。

定義 (対数)　$a \neq 1, a > 0$ とする。任意の正の実数 M に対して $a^r = M$ を満たす実数 r が必ず一つ存在する。この r を **対数**

$$\log_a M$$

と表し，a を **底** とする M の **対数** という。また，M をこの対数の **真数** という。 **底**

(定義終) **真数**

注意　対数の真数は，**常に正のもののみ** を考えます。

それゆえ，以下では特に断らないことがあります。つまり $\log_a M$ と書いてあれば，$M > 0$ であると暗黙のうちに仮定します。 **(注意終)**

この定義から，次のような書き換えができることがわかります。

$a \neq 1,\ a > 0,\ M > 0$ のとき，

$$r = \log_a M \iff M = a^r$$

例

(1) $10^3 = 1000$ なので，$\log_{10} 1000 = 3$。

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = 27$ なので，$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$。

(例終)

練習 273 次の等式を $r = \log_a M$ の形に書き直せ。

(1) $3^3 = 27$　(2) $(0.1)^{-2} = 100$　(3) $\sqrt[3]{8} = 2$

(4) $(\sqrt{2})^6 = 8$　(5) $4^1 = 4$　(6) $9^0 = 1$

例題 106 次の等式を満たす x または a の値を求めよ。

(1) $\log_3 x = 4$　(2) $\log_a 8 = 3$

解説　先の練習では指数の形で表されていた等式を対数を用いて書き直しましたが，今度は逆に対数を用いて表された等式を指数の形に書き直すことをやりましょう。

定義にしたがって素直に書き直すだけです。

(1) は $3^4 = x$，(2) は $a^3 = 8$ となります。これから答えはすぐにお分かりだと思います。

解答例　(1) 与式は $3^4 = x$ と変形できるので，$x = 81$ $\cdots$ **(答)**

(2) 与式は，$a^3 = 8$ と変形できるので，$a = 2$ $\cdots$ **(答)**　**(解答例終)**

練習 274 次の等式を満たす x または a の値を求めよ。

(1) $\log_3 x = 2$　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$　(3) $\log_a 64 = 6$　(4) $\log_a \dfrac{1}{3} = -2$

例題 107 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_5 625$　(2) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

解説　後で学習する対数の性質を用いると簡単に計算できるようになるのですが，対数の定義になれてもらうことを目的として，練習してもらいましょう。

(1) このままではやりにくいので $\log_5 625 = x$ とおいて，指数の形に書き直してみましょう。すると，

$$5^x = 625$$

となることがわかります。

これは，前節でやった方程式ですね。ということは 625 を 5 の累乗の形に書き直せば解決します。

(2) も同様ですが，ちょっと工夫しましょう。

同じように $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$ とおいて変形すると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 32$$

です。このとき x がいくらかすぐにわかるでしょうか?

わかる人は特に工夫はいりませんが，もしわかりにくいという人がいたら，次のようにしてみるといいでしょう。

$\dfrac{1}{2}=2^{-1}$ ですから，左辺は $(2^{-1})^x$ となり，

$$2^{-x}=2^5$$

を得ます。ここまで変形しておけば，x は暗算でも求められるでしょう。

解答例　(1) $\log_5 625 = x$ とおいて，変形すると

$$5^x = 5^4$$

よって

$$x = 4 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$ とおいて変形すると，

$$2^{-x}=2^5$$

よって，

$$x = -5 \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 275 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_2 64$　　(2) $\log_{\sqrt{5}} 25$

23.6　対数の性質

23.6.1　対数の基本性質

前節の最後に挙げた例題のような計算は，本節で紹介する対数の性質を用いると比較的簡単に計算することができるようになります。

まずは基本的な性質から。

$a^0=1,\ a^1=a$ ですから，

定理 (対数の性質 (その 1))

(1) $\log_a 1 = 0$　　(2) $\log_a a = 1$

また，指数法則 $a^m a^n = a^{m+n},\ a^m \div a^n = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn}$ を対数に書き換えると次の定理が得られます。

定理 (対数の性質 (その 2))　$M > 0,\ N > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ r$ を実数とするとき，
(1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
(3) $\log_a M^r = r \log_a M$

証明　$M = a^m,\ N = a^n$ とすると，

$$MN = a^m a^n = a^{m+n}$$

これを対数を用いて表すと，

$$\log_a MN = m + n$$

$m = \log_a M,\ n = \log_a N$ であるから，

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

(証明終)

問 152 定理「対数の性質 (その 2)」の残りを証明せよ。

この性質を用いると，先の節の例題は次のように計算することができます。ただし 2 番目の $\log_{\frac{1}{2}} 32$ は，後に回します。

例

$$\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4 \log_5 5 = 4 \times 1 = 4$$

(例終)

もう少し複雑な例を挙げましょう。どこでどの性質を用いているか，よく観察してください。

例

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 6 &= \log_2 \left(\frac{4}{3} \times 6\right) \\ &= \log_2 8 \\ &= \log_2 2^3 \\ &= 3 \log_2 2 = 3\end{aligned}$$

(例終)

例

$$
\begin{aligned}
2\log_4\sqrt{12}-\log_4 3 &= \log_4(\sqrt{12})^2-\log_4 3\\
&= \log_4 12-\log_4 3\\
&= \log_4\frac{12}{3}\\
&= \log_4 4 = 1
\end{aligned}
$$

(例終)

練習 276 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 64$ (2) $\log_{10} 8-\log_{10}\frac{4}{5}$

(3) $\log_2\frac{2}{5}+\log_2 40$ (4) $\log_5\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_5 3-\log_5\sqrt{6}$

23.6.2 底の変換公式

次のような「底の変換公式」も成り立ちます。 **底の変換公式**

定理 (底の変換公式) $a,\ b$ の 1 でない正の数，$M>0$ とするとき，

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$$

証明 $r=\log_a M$ とすると，$a^r=M$ である。この両辺の b を底とする対数を考えると，

$$\log_b a^r=\log_b M$$

で，左辺を対数の性質を用いて変形すれば，

$$r\log_b a=\log_b M$$

$r=\log_a M$ だったので，結局

$$\log_a M\times\log_b a=\log_b M$$

$a\neq 1$ なので，$\log_b a\neq 0$。そこで，両辺を $\log_b a$ で割れば，

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$$

を得る。 **(証明終)**

注意　「底の変換公式」の左辺の底は a であるのに対して，右辺の底は b になっています。つまり底を a から b に変換したことになっています。

左辺の a や M が右辺のどこに移っているのか，十分観察してください。　**(注意終)**

例　$\log_9 27$ を計算しましょう。

ここに出てきている 9 や 27 はいずれも 3 の累乗として表すことができます。そこで，底を 3 に変換します。

$$\begin{aligned}\log_9 27 &= \frac{\log_3 27}{\log_3 9} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(例終)

例　次に先の例題の $\log_{\frac{1}{2}} 32$ です。底は 2 にするといいですね。

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} 32 &= \frac{\log_2 32}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= \frac{5}{-1} \\ &= -5\end{aligned}$$

(例終)

練習 277 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_4 32$　　(2) $\log_{27} 9$

例題 108 $\log_2 3 \cdot \log_3 8$ の値を求めよ。

解説　「底の変換公式」の練習問題です。

かけあわせている二つの数 $\log_2 3$ と $\log_3 8$ は，底が異なっています。そこで，どちらか一方の底に揃えましょう。どちらに揃えても構いません。解答例では 2 の方に揃えてみました。

うまい具合に $\log_2 3$ が約分できました。

解答例

$$\begin{aligned}\log_2 3 \cdot \log_3 8 &= \log_2 3 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \\ &= \log_2 8 \\ &= 3 \ \cdots \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(解答例終)

問 153 上の計算を底を 3 に揃えることで行え。

練習 278 次の値を求めよ。

(1) $\log_9 5 \cdot \log_5 9$ (2) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 8$

上の練習の (1) からわかるように，次の公式も成り立ちます。

系 (底の変換公式)

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

23.7 対数の大小

先の節で次の定理を証明しました。

定理 (累乗の大小，相等)

(1) $a > 1$ のとき， $x > y \Longleftrightarrow a^x > a^y$

(2) $0 < a < 1$ のとき，$x > y \Longleftrightarrow a^x < a^y$

(3) $a \neq 1,\ a > 0$ のとき $x = y \Longleftrightarrow a^x = a^y$

これを対数を用いて書き直すと，次の定理が得られます。

定理 (対数の大小，相等)

(1) $a > 1$ のとき， $x > y \Longleftrightarrow \log_a x > \log_a y$

(2) $0 < a < 1$ のとき，$x > y \Longleftrightarrow \log_a x < \log_a y$

(3) $a \neq 1,\ a > 0$ のとき $x = y \Longleftrightarrow \log_a x = \log_a y$

問 154 証明を書き下せ。

例 $\log_3 2,\ \log_3 \dfrac{2}{3},\ \log_3 1.8$ を小さい順に並べてみましょう。

底は 3 なので，定理「対数の大小」の (1) が使えます。つまり真数の大小がそのまま，対数の大小になります。

今

$$\frac{2}{3} < 1.8 < 2$$

ですから，

$$\log_3 \frac{2}{3},\ \log_3 1.8,\ \log_3 2$$

となります。 **(例終)**

例　$\log_{0.5} 0.2,\ \log_{0.5} 0.9,\ \log_{0.5} 0.09$ はどうでしょう。今度は，定理「対数の大小」の (2) ですね。

$$0.09 < 0.2 < 0.9$$

ですから，大小は逆転して，

$$\log_{0.5} 0.9,\ \log_{0.5} 0.2,\ \log_{0.5} 0.09$$

となります。 **(例終)**

練習 279 次の各組の数を小さい順に並べよ。

(1) $3\log_2 3,\ 2\log_2 5$　　(2) $3,\ \log_4 24,\ \log_2 5$

23.8　常用対数

23.8.1　常用対数の定義

対数 $\log_a x$ の底 a は $a > 0,\ a \neq 1$ であれば，いろいろな値を考えることができるので，たとえば $\log_2 3$ のように簡単にならないようなものの値を計算するのは大変なように見えます。

しかし定理「底の変換公式」を用いれば，どれか一つの底について値がわかっていれば，それらは間接的に計算できるようになります。

そこで次のようなものを考えます。

定義 (常用対数)　底が 10 の対数を **常用対数** という。 **(定義終)**　**常用対数**

底の変換公式を用いれば，

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$

ですから，$\log_{10} 3$ や $\log_{10} 2$ の値がわかれば $\log_2 3$ の値を計算することができます。

常用対数を計算する方法は，微分積分を用いて与えられます。それゆえ，ここではそのような計算によって得られた結果を使う方法を紹介しましょう。

実際，多くの方の努力によって巻末 (799 ページ) に与えたような「常用対数表」というものが作られています。

最近では関数電卓や表計算ソフトが手軽に手に入るようになりましたので，三角比の表と同じく，あまり必要ではなくなってきています。

例　常用対数表を用いていくつかの値を求めてみましょう。

たとえば，

$$\log_{10} 2.48 = 0.3945$$

です。

ここで，2.4 は常用対数表の左端から選び，小数第 2 位の 8 は，一番上の欄から選びます。

では，$\log_{10} 248$ はどうでしょう。248 は常用対数表にはありません。しかし，

$$248 = 2.48 \times 100 = 2.48 \times 10^2$$

ですから，

$$\begin{aligned}\log_{10} 248 &= \log_{10}(2.48 \times 100)\\ &= \log_{10} 2.48 + \log_{10} 100\\ &= 2.3945\end{aligned}$$

と計算できます。

では，$\log_{10} 0.248$ はどうでしょう。

$$0.248 = 2.48 \times 10^{-1}$$

ですから，

$$\begin{aligned}\log_{10} 0.248 &= \log_{10}(2.48 \times 10^{-1})\\ &= \log_{10} 2.48 - 1\\ &= 0.6055\end{aligned}$$

を得ます。 **(例終)**

練習 280 常用対数表を用いて次の値を小数第 4 位まで求めよ。

(1) $\log_{10} 7.34$ (2) $\log_{10} 644$ (3) $\log_{10} 0.000123$

もう一つ例を挙げましょう。「底の変換公式」を用いるものです。

例 $\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$ なので，

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \frac{0.4771}{0.3010} = 1.5850$$

(例終)

練習 281 $\log_{10} 2 = 0.3010,\ \log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて次の値を計算せよ。

(1) $\log_{10} 6$ (2) $\log_{10} 12$ (3) $\log_{10} 5$

(**ヒント：** $5 = \dfrac{10}{2}$ である。)

23.8.2　常用対数と桁数

天文学や物理学，化学では非常に大きな数や非常に小さな正の数を扱うことがあります。そのようなときに大体どれくらいの大きさ (あるいは小ささ) かがわかると，イメージしやすくなります。

それを可能にしてくれるのが次の常用対数です。

いくつかの例から始めましょう。

次の値を求めてください。

$$\log_{10} 100, \quad \log_{10} 10000, \quad \log_{10} 10000000$$

すぐにわかるように，

$$\log_{10} 100 = 2$$
$$\log_{10} 10000 = 4$$
$$\log_{10} 10000000 = 7$$

です。

一方，100 は 3 桁の数，10000 は 5 桁，10000000 は 8 桁です。

これらの結果を突き合わせると，10^n の桁数は $n+1$ であることがわかります。

さて，整数 x が n 桁であるとしましょう。このとき，

$$10^{n-1} \leqq x < 10^n$$

です。辺々の底が 10 の対数を取ると，

$$n - 1 \leqq \log_{10} x < n$$

となります。

このプロセスは逆にたどることができますから，整数 x に対して，

$$n - 1 \leqq \log_{10} x < n$$

を満たすような n が見つかれば，x は n 桁の数であることが結論できます。

一般論ではわかりにくいでしょうから，例題をお見せしましょう。

例題 109　2^{20} は何桁の数か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてよい。

解説　上で説明したように，まずは 2^{20} の底を 10 とする対数を取ります。すると，

$$\log_{10} 2^{20} = 20 \log_{10} 2 = 6.020$$

です。よって，
$$6 \leqq \log_{10} 2^{20} < 7$$
つまり上の解説でいう n は 7 です。よって，7 桁であることが結論できます。

解答例　2^{20} の底を 10 とする対数を取ります。すると，
$$\log_{10} 2^{20} = 20 \log_{10} 2 = 6.020$$
よって，
$$6 \leqq \log_{10} 2^{20} < 7$$
ゆえに，
$$2^{20} \text{ は } 7 \text{ 桁} \quad \cdots \textbf{(答)}$$
(解答例終)

補注　上の解答例のようにきちんと
$$6 \leqq \log_{10} 2^{20} < 7$$
と書いてほしいのですが，単に桁数だけを求めるなら，$\log_{10} 2^{20} = 6.020$ からすぐに「7 桁」としても構いません。ただし，$\log_{10} 2^{20}$ の値の整数部分に 1 を加えるのを忘れないように! **(補注終)**

練習 282　3^{10} は何桁か。$\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてよい。

23.9　指数関数・対数関数

23.9.1　指数関数

指数関数の定義

お話だけで済ませましたが，$a > 0$ とするとき，実数 x に対して a^x を考えることができるようになりました。

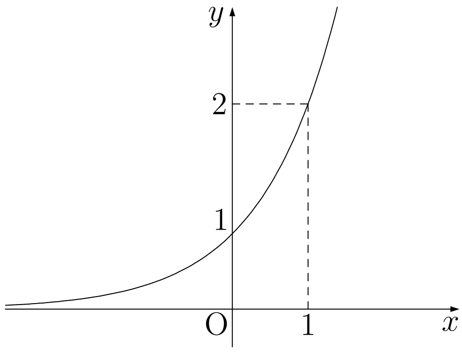
そこで，これを関数として考えましょう。つまり，
$$y = a^x$$
という関数です。

このような関数を a を **底** とする **指数関数** といいます。　**底**　**指数関数**

指数関数のグラフ

それでは指数関数のグラフを描いてみます。以下の図は，グラフを描くツールを用いて描いています。みなさんも，なんらかのツール，たとえば表計算ソフトなどを用いて描いてみてください。

さて，グラフの様子は底 a が，$a > 1$ の場合と $0 < a < 1$ で劇的に変わります。たとえば $y = 2^x$ のグラフは次のようになります。



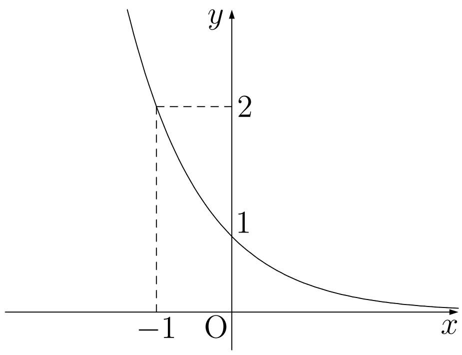
定理「累乗の大小」の (1) より，$y = 2^x$ は増加関数になっていることがわかりますが，これは上のグラフからも確認できます。

また，x は実数なら何でもよいのに対して，y の方は，正の実数だけしか取りません。つまり定義域は実数全体，値域は正の実数全体です。

さらにグラフと y 軸との交点は (0, 1) です。これは a の値に無関係です。

また，グラフは左にいくにつれて徐々に x 軸に近づきます (図では左端で x 軸にくっついているように見えますが，実際にはほんの少しですが離れています)。これを「x 軸はグラフの **漸近線**（ぜんきんせん） である」といいます。　**漸近線**

次に $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフを描いてみましょう。



定理「累乗の大小」の (2) より，$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ は減少関数になっていることがわかりますが，これは上のグラフからも確認できます。

また，x は実数なら何でもよいのに対して，y の方は，正の実数だけしか取りません。つまり定義域は実数全体，値域は正の実数全体です。

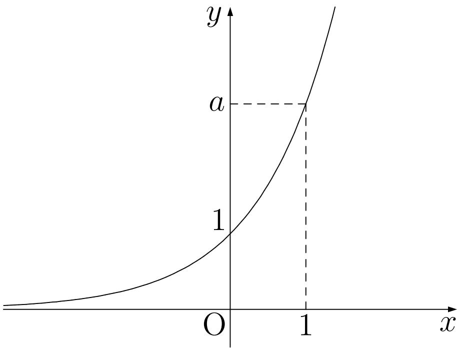
さらにグラフと y 軸との交点は $(0,\ 1)$ です。これは a の値に無関係です。

この場合も，x 軸がグラフの漸近線になっています。

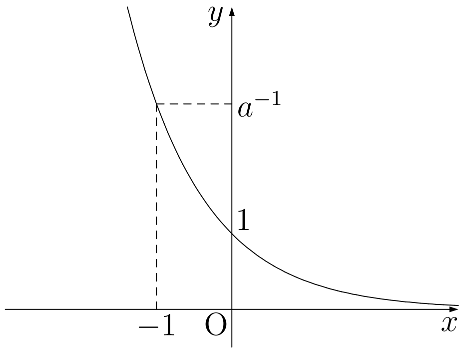
ここでは $a=2$ の場合と，$a=\dfrac{1}{2}$ の場合のグラフで観察しましたが，$a>1$ の場合は $a=2$ と，$0<a<1$ の場合は $a=\dfrac{1}{2}$ とグラフの様子は同様になります。

つまり指数関数 $y=a^x$ のグラフは次のようになります。

(1) $a>1$ のとき



(2) $0<a<1$ のとき



指数関数の性質

以上のことから次の定理を得ます。

定理 (指数関数の性質)

(1) 定義域は実数全体，値域は正の実数全体である。

(2) グラフは $(0,1)$ を通る。

(3) x 軸はグラフの漸近線である。

(4) $a>1$ のとき，関数は増加関数であり，$0<a<1$ のとき減少関数である。

23.9.2 対数関数

対数関数の定義

底が $a>0$ ただし $a\neq 1$ である対数を考えましょう。x が正の実数なら値 $\log_a x$ を考えることができますので，これを関数として考えます。つまり，

$$y=\log_a x$$

という関数です。

真数は正でなければいけませんでしたから，$x>0$ という条件を忘れないように。

このような関数を a を **底** とする **対数関数** といいます。 **底**

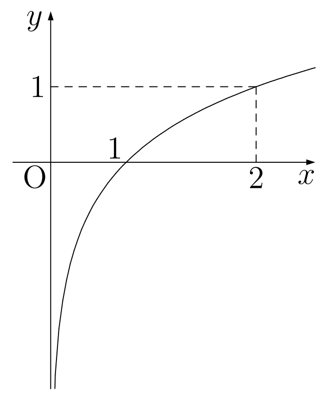
対数関数

対数関数のグラフ

指数関数の場合と同じように，グラフを描いてみましょう。

対数関数の場合も，$a > 1$ の場合と，$0 < a < 1$ の場合でグラフは劇的に変わります。

たとえば，$y = \log_2 x$ のグラフは次のようになります。



定理「対数の大小」の (1) より，$y = \log_2 x$ のグラフは増加関数であることがわかりますが，これは上のグラフからも確認できます。

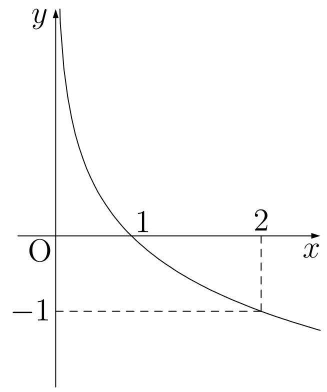
また，x は正の実数だけであるのに対して，y の方は，実数全体となります。つまり定義域は正の実数全体，値域は実数全体です。

これはグラフが y 軸より右側にしか現れない理由です。

さらにグラフと x 軸との交点は $(1,\ 0)$ です。これは a の値に無関係です。

また，グラフは x 軸の左側から 0 に近づくにつれて，徐々に y 軸に近づきます。つまり y 軸はグラフの漸近線になっています。

次に $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフを描いてみましょう。



定理「対数の大小」の (2) より，$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ は減少関数になっていることがわかりますが，これは上のグラフからも確認できます。

また，x は正の実数だけであるのに対して，y の方は，実数全体となります。つまり定義域は正の実数全体，値域は実数全体です。

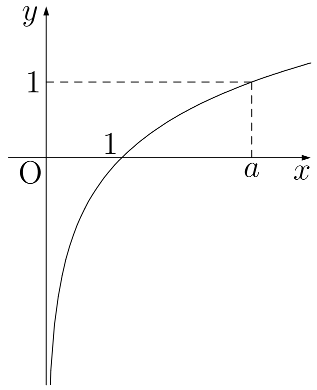
さらにグラフと x 軸との交点は $(1,\ 0)$ です。これは a の値に無関係です。

また，y 軸はグラフの漸近線になっています。

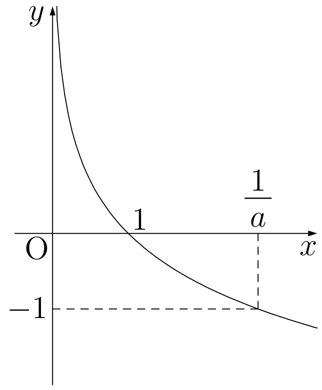
ここでは $a=2$ の場合と，$a=\dfrac{1}{2}$ の場合のグラフで観察しましたが，$a>1$ の場合は $a=2$ と，$0<a<1$ の場合は $a=\dfrac{1}{2}$ とグラフの様子は同様になります。

つまり対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは次のようになります。

(1) $a>1$ のとき



(2) $0<a<1$ のとき



対数関数の性質

以上のことから次の定理を得ます。

定理 (対数関数の性質)

(1) 定義域は正の実数全体，値域は実数全体である。

(2) グラフは $(1,\ 0)$ を通る。

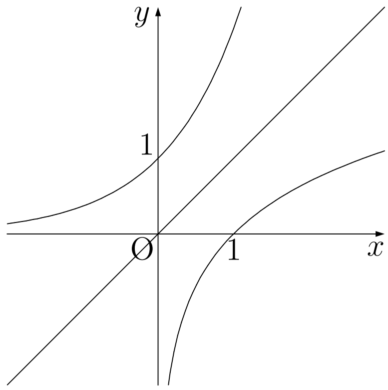
(3) y 軸はグラフの漸近線である。

(4) $a>1$ のとき，関数は増加関数であり，$0<a<1$ のとき減少関数である。

指数関数のグラフと対数関数のグラフの関係

最後に，$y=a^x$ のグラフと $y=\log_a x$ のグラフの位置関係を見ておきましょう。

$a>1$ とします。次のグラフを見てください。



両方のグラフの中央にある直線は $y=x$ のグラフです。で，よく見ると，二つのグラフはこの直線に関して対称になっていることがわかります。

これを式で確かめておきましょう。

$(p,\ q)$ を $y=a^x$ のグラフ上にある点であるとします。$(p,\ q)$ の $y=x$ に関する対称な点は $(q,\ p)$ となります。

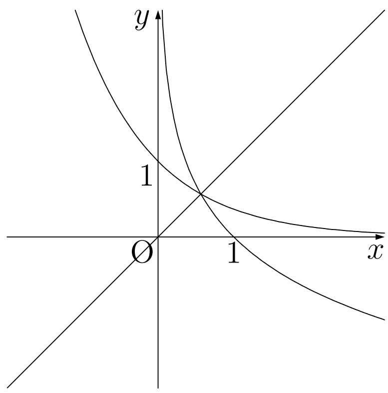
一方，

$$q=a^p$$

です。よって，対数の定義から $p=\log_a q$ であり，$(q,\ p)$ は $y=\log_a x$ のグラフ上の点であることがわかります。

つまり，$y=a^x$ のグラフと $y=\log_a x$ のグラフは $y=x$ に関して対称です。

同様のことが，$0<a<1$ の場合にも成り立ちます。グラフから確かめておいてください。



23.10　さらに勉強するために

指数を実数まで拡張することで,「指数関数」や「対数関数」が得られました。これらは，次章で紹介する「三角関数」とあわせて **初等関数** と呼ばれます。 **初等関数**

これらは，関数の中でも基本的であると同時に，自然現象を記述するときに非常に役に立つからです。

　より詳しい性質については，微積分を学習することによって調べることができるようになります。