第24章　三角関数

24.0　はじめに

本章は，先の「三角比」の章の続きです。指数計算や対数計算の最後にこれらを関数として捉え直したのと同様に，ここでは三角比を関数として捉え，その性質のじゃっかんを紹介します。

第１節では，その準備として「一般角」の考え方を紹介します。ここで，360 度より大きな角，あるいは負の角の考え方を導入します。

次の第 2 節は「弧度法」と呼ばれる角度の表し方の紹介です。

小学校以来「度」という単位で角度の大きさを表してきましたが，数学の理論面からいうと「弧度法」の方が便利なのです。はじめは大分戸惑うかもしれませんが，慣れていってください。

弧度法のよさを感じてもらうために，この節の最後に，弧度法を用いた弧の長さの計算公式と，扇形の面積の計算公式を紹介しておきました。これらを見ればお分かりのように，式自体はかなり簡単なものになります。

弧度法のさらなる便利さは，三角関数の微分積分のところで明らかになります。

第 3 節と第 4 節で，一般角に対する三角関数の定義とその性質を紹介します。

一般角に対する三角関数の定義は，鈍角に対する三角比の定義と同様なので，先の章を十分理解している人には難しさはないでしょう。復習を兼ねて，本文を読む前にこのヒントから三角関数を定義してみるのも悪くないでしょう。

第 4 節には，たくさんの公式が現れます。「三角比」のところでもそうでしたが，三角関数は多数の公式が成り立ちます。第 4 節で紹介する公式はほとんど図を描けば明らかです。公式を覚えることは大切ですが，むしろ必要に応じて導けるようになっておくことも先の数学を学習する際には重要です。もちろん試験のときには 1 分 1 秒を争うので，そんな悠長なことをしている暇はないかもしれませんが，公式を導くことに慣れていれば，書き下すまでにそんなに時間はかからなくなります。

本節で一番重要な公式は最後の「相互関係」です。

指数計算・対数計算の主役が「指数法則」であり，自然数から実数までその対象を拡張してきたのに対応するように，まず鋭角の三角比で成り立っていた「相互関係」が鈍角の場合にも成り立ち，さらには一般角でも成り立つことが理論的には重視すべき点でしょう。

第 5 節では，三角関数のグラフを紹介します。

2次関数の学習をしたときに，関数の性質を調べるもっとも手っ取り早い方法がグラフを描くことであると説明しました。ここでも同様で，三角関数のグラフを描くとことでその性質を直観的に捉えてもらおうと思います。
2次関数のときのように，たくさんの点をとってグラフを描いていくことはちょっと難しいかもしれません。もちろん「三角比の表」を活用して描いても構いません (時間はかかりますが，むしろ積極的にそうすべきかもしれません)。
本文にも書きましたが，最近ではこういったグラフを命令一発で描いてくれるソフトウエアも流通しています。そういったものを利用してもいいでしょう。
三角関数は，1次関数や2次関数とは大分異なる性質を持っていることが，グラフから判明します。特に，三角関数の周期性と，偶関数，奇関数といった関数の性質を表現する一般的な概念に慣れてください。
第6節では，第5節で判明したグラフを用いて，三角関数のからんだ少し複雑な関数のグラフの描き方と，グラフを用いた不等式の解き方を紹介しました。
グラフに関しては，さらに複雑なものを「研究課題」としておきました。これらを手書きするのは，かなり大変でしょう。環境が簡単に手に入る人は，ソフトウエアを上手に用いて，コンピュータに描かせてみてください。
また，後半の不等式の解き方は，2次関数のところで2次不等式を解いたときの方法の復習です。
第7節で「加法定理」と,「合成の公式」を紹介しました。これらは，三角関数のもつもっとも重要な性質です。
特に「加法定理」からはたくさんの公式が導かれます。ここでもすべてを覚えるのではなく,「加法定理」からそのほかの公式を導くことに慣れておいてください。

「三角比」のとき以上に，たくさんの公式が本章では出てきます。
そのためその証明は，できるだけみなさんにしていただくようにしました。一つにはスペースの節約のため (決して著者の手抜きではない! (笑))，もう一つは，みなさんに証明を書く練習をしてもらうためです。
より高度な数学書を読むときにはどうしても，自分で計算したり，ことばや文章を (長いときにはノート数ページ分) 補う必要がでてきます。その練習も兼ねています。
ただし，書きっぱなしにせず，書いたものを友達や指導者に読んでもらい，自分の考えたことが誤解なくちゃんと伝わるかどうかを確かめておいてください。
それでは，盛りだくさんの内容を持つ「三角関数」の勉強をはじめましょう。

24.1　一般角

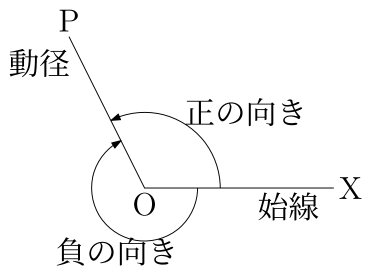
24.1.1　一般角

三角比を考えるとき，角度の範囲は 0° 以上 180° 以下でした。この範囲では，関数として考えにくいので，より一般の角度を考える必要があります。それが **一般角** の考え方です。

定義 (始線，動径，正の向き，負の向き)　平面上で点 O を中心に回転する半直線 OP を考える。OP の最初の位置を OX とするとき，OX を **始線**，OP を **動径** という。

回転の方向が左回り，つまり反時計回りに回るとき，回転の **正の向き**，右回りのとき，回転の **負の向き** という。

始線
動径
正の向き
負の向き



(定義終)

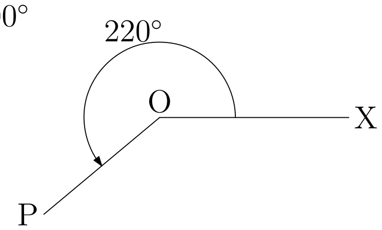
これまで，角は静止したものだったのに対して,「回転」という動きを考えていることに注意してください。つまり，はじめは OX の位置にあった OP が点 O を中心として回転し，図の OP の位置にきたと考えるわけです。

角 XOP の大きさは，OX から OP に至る回転の量で表されます。そして，回転が正の向きであるときには正の数で，負の向きであるときには負の数で表されます。

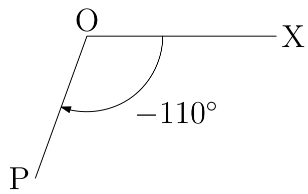
また角 XOP の大きさは，動径 OP の回転数に対応していくらでも大きな値あるいは小さな値をとることができます。

例　次の角の大きさの示す動径 OP を図示してみましょう。

(1) 200°



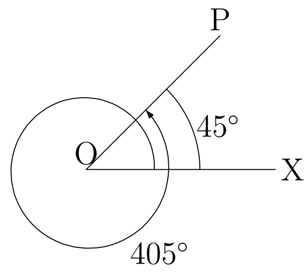
(2) −110°



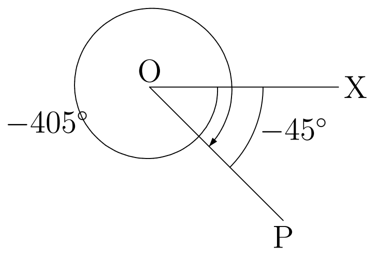
(例終)

360° より大きな角の場合は次のようになります。

例　405° は，正の方向にひとまわり (360°) し，さらに 45° 回ったものです。



また，−405° は負の方向にひとまわりし，さらに 45° 回ったものです。



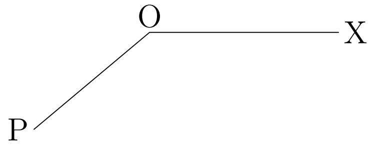
(例終)

このように，360° 以上の角度や負の角度まで拡張した角を，**一般角** といいます。 **一般角**

練習 283 次の角を図示せよ。
(1) 280°　(2) 765°　(3) −45°　(4) −360°

24.1.2　動径の表す一般角

先の節では，はじめに角度が与えられていて，それを図示しましたが，今度は逆を考えましょう。
次の角 XOP は何度でしょう。



もちろん通常は劣角の方を分度器で測り，140° などと答えるかもしれません。しかし私たちは，上で一般角を考えました。この考え方を用いた場合，上の角は何度と答えるのが妥当でしょうか?

まず一般角を考える場合，動径 OP が 始線 OX からどちらの向きにどれだけ回転したかがポイントでした。

上の図で，OP は OX からどちらの方向に回転したのでしょう?

この図だけでは

判断できません!!

上の測定の通り，劣角は 140° ですから，正の方向へ回ったと考えれば 220° ですし，負の方向へ回ったと考えれば -140° となります。

いえいえ，それだけではありません。

直接 OP まで動いたとは限りません。そう，正の方向に一回転してから OP に至ったと考え，580° としてもいいですし，負の方向に一回転したと考えれば，-500° としても構わないわけです。

つまり，O の回りの回転の向きと，O の回りを何回転して OP の位置に来たかによって角の大きさは

いろいろな値が考えられるのです。

しかし，一方でこれらの値はどんなものでもよいわけではありません。上で得られた値を小さい順に並べてみると，

$$-500^\circ,\quad -140^\circ,\quad 220^\circ,\quad 580^\circ$$

これはどんな数列になっているでしょう?

そう，初項が -500°，公差が 360° の等差数列ですね。

このように見ると，一般項は

$$-500^\circ + 360^\circ \times n$$

と書くことができます。

しかし待ってください。私たちが先の数列の章で一般項を表した場合，n は自然数でした。ということは，上の式では -500° 以上の角しか表すことができません。

ところが実際には，負の方向には何回転していても構わないのですから，-500° 以下の角度もありえます。

ちょっと困ったことになるのですが，この問題は，n に負の整数も許せば解決します。

つまり，

$$-500^\circ + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

とすれば，すべての一般角を表すことができるわけです。

もう一つ。

上では初項を -500° に取りましたが，n を整数と考えると，どこからはじめても構わなくなるのですから，もっとわかりやすい角度にした方がいいでしょう。

そこで普通は 0° 以上 360° 未満でとり，上の場合なら，

$$200^\circ + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

と表します。

一般に角 XOP は

$$\alpha + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

ただし $0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ と表すことができるわけです。

注意　上では $0^\circ \leqq \alpha < 360^\circ$ としましたが，議論する状況や，本によっては，$-180^\circ \leqq \alpha < 180^\circ$ とすることもあります。 **(注意終)**

24.2　弧度法

ここまで，角の大きさを表す単位として **度** を用いてきましたが，この他に **弧度法** と呼ばれるものがあります。

この単位を用いることによって，数学で現れる三角関数についての様々な公式が単純な形で表現できるようになります。

半径 r の円周上の弧 l の長さと中心角 θ の間には，

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$$

という関係式が成り立ちました。ここで π は円周率ですから定数ですし，半径 r を一つ固定して考えると，$\dfrac{2\pi r}{360}$ は定数となりますから，これを a とおくと，上の式は

$$l = a\theta$$

となり，

弧の長さ l は中心角 θ に比例する

ことがわかります。

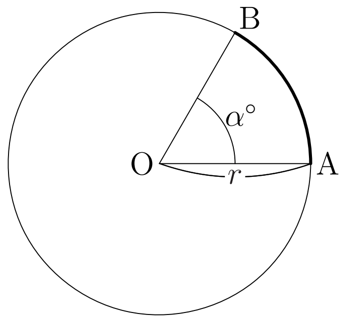
さて半径 r の円で，半径に等しい長さの弧 AB に対する中心角の大きさを α° とすると，上の式から，

$$r = 2\pi r \times \frac{\alpha}{360}$$

となり，両辺を r で割って α について解くと，

$$\alpha = \frac{180}{\pi}$$

を得ます。



この式からわかるように，この中心角の大きさ α は半径 r に関係なく一定の値です。

そこで，この一定の大きさの角を **1 ラジアン** (あるいは **1弧度**) といい，これを単位として角の大きさを測る方法を **弧度法** といいます。

ラジアン
弧度
弧度法

注意

(1) 1ラジアンは約 57° です。
(2) 弧度法では，単位名の「ラジアン」を省略するのが普通です。もしつけるときには,「θ rad」のように rad とします。
(3) 上では一般の半径 r を持つ円で説明しましたが，上の結論の通り半径には関係なく弧度を考えることができます。言い替えると，議論の都合のよいように半径を考えてもよいということになります。そこでよく半径を 1 と考えて弧度を用いた議論をすることがあります。
(4) 半径 1 の円で考えると，その円周の長さは 2π で，その中心角の大きさは 360° です。これより

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

書き換えると,

$$180° = \pi \text{ rad}$$

です。
よって，この両辺を 180° で割れば,

$$1° = \frac{\pi}{180°} \text{ rad}$$

を得ますし，両辺を π で割れば,

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

を得ます。

(注意終)

さて，では今までの単位「度」と「ラジアン」はどうやって単位を変換したらいいでしょう。その答えは，上の注意で導いた関係式から簡単にわかります。

定理として書くなら次のようになるでしょう。先を見る前に，自分でも考えてみてください。

定理 (度数と弧度の変換)　$x°$ が弧度法で θ ラジアンであるとき，

$$\theta = \frac{\pi}{180}x$$

証明　上の注意より，

$$1° = \frac{\pi}{180°}\ \mathrm{rad}$$

両辺を x 倍すると

$$x° = \frac{\pi}{180°}x\ \mathrm{rad}$$

であり，$x° = \theta\ \mathrm{rad}$ なので，

$$\theta = \frac{\pi}{180°}x$$

(証明終)

例　$30°$ を弧度法で表すと，

$$\frac{\pi}{180°} \times 30° = \frac{\pi}{6}$$

(例終)

問 155 次の換算表の空欄を埋めよ。

$x°$	$30°$	$45°$	$60°$				$180°$
θ rad	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	

扇形の弧の長さと面積　平面図形に関する章で，弧の長さや扇形の面積を計算する公式を紹介しました。これらの公式は，度数を単位として表しましたが，弧度法を用いると少し単純な形になります。ここではそれを見ましょう。

　半径 r の円で，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ ラジアンとします。これを度数に変換したら $x°$ になるとすると，

$$x = \frac{180}{\pi}\theta \qquad (*)$$

となります (先の変換公式を x について解けばこれを得ます)。

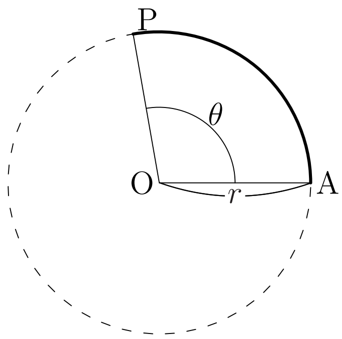
　ところで，半径 r，中心角が $x°$ の扇形の弧の長さを l とすると

$$l = 2\pi r \times \frac{x}{360}a$$

でしたから，この x に $(*)$ を代入して整理すると，

$$l = r\theta$$

となります。



また，扇形 AOP の面積を S とすると，扇形の面積 S は

$$S = \pi r^2 \times \frac{x}{360}$$

でしたから，同様にして，

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

を得ます。

問 156 上の「この x に $(*)$ を代入して整理すると，

$$l = r\theta$$

となります。」と,「同様にして，

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

を得ます。」をきちんと書き下せ。

以上を定理としてまとめましょう。

定理 (扇形の弧の長さと面積) 半径 r，中心角が θ rad の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

注意 第一の式を用いて第二の式を変形すると，

$$S = \frac{1}{2}lr$$

となり，三角形の面積の公式を連想させる形になっています。 **(注意終)**

例 半径が 4，中心角が $\frac{\pi}{3}$ の扇形の弧の長さ l は，

$$l = 4 \times \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

また面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 4 = \frac{8}{3}\pi$$

(例終)

練習 284 半径 10, 中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇形の弧の長さと面積を求めよ。

24.3　一般角の三角関数

先の節で 弧度法 を説明しました。以下, 特に注意がない限り角の大きさはすべて弧度法で表示されているものとします。

24.3.1　一般角の三角関数の定義

第 15 章で, 鈍角の三角比について学習したときのことを思い出してください。

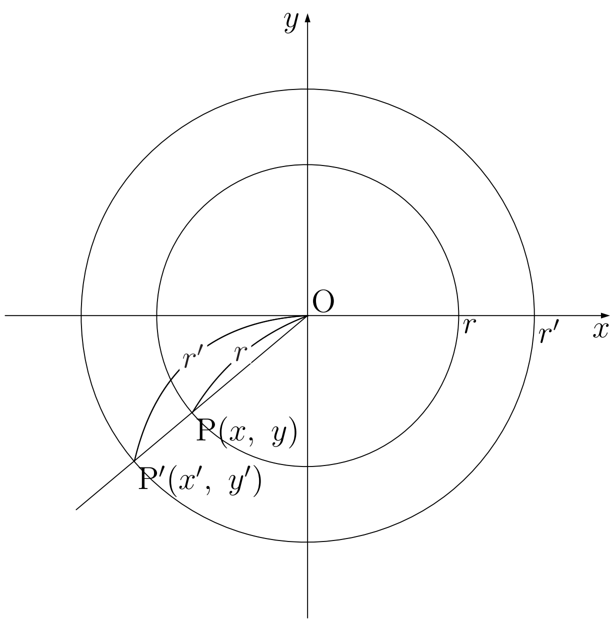
鋭角の三角比は, 直角三角形を用いていたのに対して, 鈍角のそれを定義するときには座標平面を用いました。

一般角の三角関数も同様にして定義することができます。

以下復習もかねて, もう一度説明しましょう。

OX を始線とし, 一般角 θ を表す動径を OP とします。

O を原点, 始線 OX を x 軸の正の部分とする座標軸を定めましょう。また, 原点 O を中心とする半径 r, r' の二つの円と動径 OP との交点をそれぞれ $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{P}'(x',\ y')$ としましょう。



　このとき，

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{r'}$$

が成り立ちます。

問 157　理由は?

　よって，

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}, \quad \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}, \quad \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

を得ます。

問 158　理由は?

　以上のことから，一般角 θ に対して，比の値 $\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ は動径上の点 P の取り方に関係なく一定であることがわかります。

　そこで，これらの比の値をそれぞれ，

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と表すことにします。

　第 15 章では $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ という制限のもとで考えていましたが，上の説明では θ には何の制限もありません。

　つまり，任意の実数 θ に対して値を対応させています。すなわち関数と考えることができるわけです。

　ただし，tan を考えるときには $x \neq 0$ という条件をつけます。

　そこでこれらの関数を一般角の **正弦関数，余弦関数，正接関数**といいます。　**正弦関数**

　以上のことから，正弦関数と余弦関数の定義域は，θ には制限はなく，任意の実数であり，正接関数の定義域は，$x \neq 0$ という条件から　**余弦関数**　**正接関数**

$$\left\{\theta \middle| \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}\ (n \in \mathbb{Z})\right\}$$

となります。

問 159　理由をいえ。

　また，正弦関数，余弦関数の値域はそれぞれ $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であり，正接関数の値域はすべての実数になります。

問 160　確かめよ。

以上のような関数を総称して **三角関数** といいます。 **三角関数**

例

$$\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{4}{3}\pi = \sqrt{3}$$

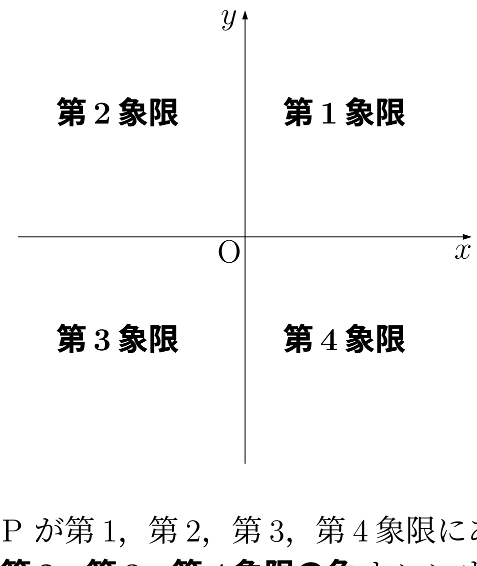
(例終)

問 161 上の例の値を確かめよ。

練習 285 θ が次の値のとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\frac{7}{6}\pi$ (2) $-\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{7}{4}\pi$ (4) $-\frac{5}{2}\pi$
(5) $-300°$ (6) $240°$ (7) $-420°$ (8) $765°$

象限の角　座標軸によって座標平面は四つの部分に分けられます。このとき，図のようにこれらをそれぞれ **第 1 象限，第 2 象限，第 3 象限，第 4 象限** といいます (名前の付け方の順番に注意してください)。ただし，座標軸上の点はどの象限にも属さないと考えます。



座標平面上の動径 OP が第 1，第 2，第 3，第 4 象限にあるとき，OP の表す一般角をそれぞれ **第 1，第 2，第 3，第 4 象限の角** といいます。

さて，三角関数の値の符号は，角がどの象限にあるかによって定まります。

問 162 以下の表の空欄を埋めよ。

象　限	第　1	第　2	第　3	第　4
$\sin\theta$	$+$	$+$		
$\cos\theta$	$+$	$-$		
$\tan\theta$	$+$	$-$		

円のパラメータ表示　話がちょっと脇道にそれますが，表題のことについて触れておきましょう。

上の定義のように，

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

でした。これらの分母を払うと，

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

を得ます。

ここで，$(x,\ y)$ は原点中心，半径 r の円上の点でした。ということは，円上の点が三角関数 (正弦と余弦ですが) を用いて表すことができたわけです。

θ が 0° からはじまって，段々大きくなることを頭の中で想像してください。上の式を用いると，それに応じて $(x,\ y)$ が半径 r の円の上を (反時計回りに) 動きはじめます。

特に半径が 1 の場合 (**単位円** といいました)，　**単位円**

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

となります。つまり，円上の点の座標がそのままその動径の定める三角関数の値になっています。この事実は，三角比の章でも指摘しておきました。思い出してください。

上の議論から，理論的な話をするときには自分の議論に都合のよい半径をとって進めてよいことがわかります。

次の節で三角関数の性質を紹介しますが，そこではこの事実を断らずに自由に用います。

24.4　三角関数の性質

それでは，三角関数の性質を挙げましょう。三角比のときと同様で，数多くの公式が存在します。

これらの公式は **覚えるのではなく**，自分で導けるようになっておいてほしいものです。もちろん使おうという場合，覚えているほうが処理が速くなりますが，将来数学を使おうという場合には，公式を導くことになれておくほうが重要です。

以下の公式の証明には図をつけておきますので，覚えるならこちらの方をお勧めします。

24.4.1　$\theta + 2n\pi$ の三角関数

まず，一般角の定義から次の式が成り立つことがすぐにわかります。

定理 ($\theta + 2n\pi$ の三角関数)　n を整数とするとき，以下が成り立つ。
(1) $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$
(2) $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$
(3) $\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$

例

$$\sin 750^\circ = \sin(30^\circ + 2 \times 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2 \times (-1) \times \pi\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

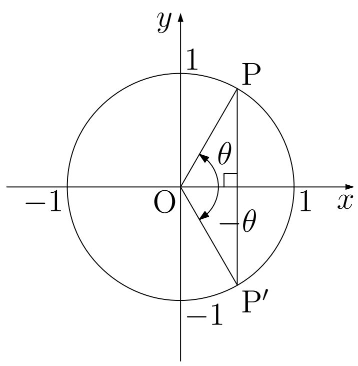
(例終)

練習 286 次の三角関数の値を求めよ。
(1) $\sin 840^\circ$　(2) $\cos(-870^\circ)$　(3) $\tan 1440^\circ$
(4) $\sin\frac{13}{6}\pi$　(5) $\cos -3\pi$　(6) $\tan\frac{7}{3}\pi$

24.4.2　$-\theta$ の三角関数

定理 ($-\theta$ の三角関数)
(1) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
(2) $\cos(-\theta) = \cos\theta$
(3) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

証明　θ を表す動径と単位円の交点を点 P とすると，その座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である。このとき，$-\theta$ を表す動径と単位円の交点 P$'$ の座標は $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる。



これより，公式は明らか。 **(証明終)**

問 163 「交点 P' の座標は $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる」を確かめよ。

問 164 上の「明らか」という部分をきちんと書き下せ。

例

$$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

(例終)

練習 287 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin(-150^\circ)$ (2) $\cos(-225^\circ)$ (3) $\tan(-135^\circ)$

(4) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$ (5) $\cos\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$ (6) $\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

24.4.3 $\theta+\pi$ の三角関数

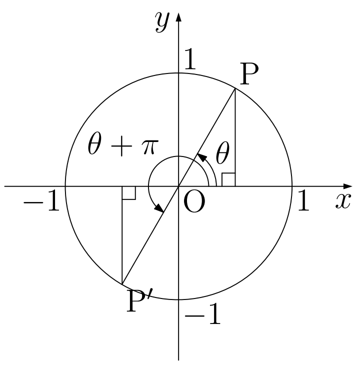
定理 ($\theta+\pi$ の三角関数)

(1) $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$

(2) $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$

(3) $\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$

証明 点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を，原点を中心に π だけ回転した点を P' とする。このとき，角 $\theta+\pi$ を表す動径は OP' であり，P' の座標は $(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる。



これより，公式は明らか。 **(証明終)**

問 165 「P' の座標は $(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる」を確かめよ。

例

$$\sin 225^\circ = \sin(45^\circ + 180^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan\frac{7}{6}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(例終)

練習 288 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 240^\circ$　(2) $\cos 210^\circ$　(3) $\tan 300^\circ$

(4) $\sin\frac{5}{4}\pi$　(5) $\cos\frac{3}{2}\pi$　(6) $\tan\frac{4}{3}\pi$

24.4.4 $\theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数

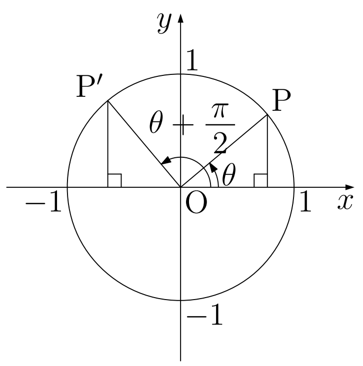
定理 ($\theta + \frac{\pi}{2}$ の三角関数)

(1) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

(2) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

(3) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$

証明　点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を，原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を P' とする。このとき，角 $\theta + \frac{\pi}{2}$ を表す動径は OP' であり，P' の座標は $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ となる。



これより，公式は明らか。 **(証明終)**

問 166 「P' の座標は $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ となる」を確かめよ。

24.4.5 $\dfrac{\pi}{2}-\theta,\ \pi-\theta$ の三角関数

これらは，三角比のところでやりました。

定理 ($\frac{\pi}{2}-\theta$ **の三角関数)**
(1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
(2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
(3) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

定理 ($\pi-\theta$ **の三角関数)**
(1) $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
(2) $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
(3) $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

証明は，そのまま通用します。

問 167 三角比のところでやった証明がそのまま通用することを確かめよ。

24.4.6 相互関係

三角比のところで,「相互関係」として次の定理を紹介しました。これらは，一般角の場合でも成立します。

定理 (相互関係)
(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
(3) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

証明は，鈍角を含めた定理「三角比の相互関係」と同様です。

問 168 上の定理「相互関係」が,「鈍角を含めた定理「三角比の相互関係」」と同様にすることで証明できることを確かめよ。

例題 110 θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$ を満たすとき，$\sin\theta,\ \tan\theta$ の値を求めよ。

解説　すでに同じような問題を三角比のところでやっています。
注意すべきは符号で，これについては 596 ページの問いでやってもらっています。
三角比のところでやったことを思い出しながら，下の解答例を読んでください。

解答例

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

θ は第 3 象限の角なので，$\sin\theta < 0$。よって，

$$\sin\theta = -\frac{4}{5} \ \cdots \textbf{(答)}$$

また

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{3} \ \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 289 θ が第 3 象限の角で，$\sin\theta = -\dfrac{1}{4}$ を満たすとき，$\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ。

例題 111 次の等式を証明せよ。

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

解説　同じような問題ばかりでは面白くないでしょうから，証明問題をやりましょう。といっても，そんなに難しくありません。
第 18 章「式と証明」でやったような，計算だけで済むようなものです。
ま，早い話が,「相互関係」の使い方の練習ですね。
さて，与えられた等式の中には $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の三つが混ざっています。こういったときには，どれかに統一してみることです。
とはいうものの，(やってみればわかるように) この問題の場合には，一つだけに統一することはできません。そこで，まず $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を用いて左辺の $\tan\theta$ を書き直してみましょう。ここで $\dfrac{1}{\tan\theta}$ は $\tan\theta$ の逆数ですから，上の分母と分子を入れ換えればよいので，

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

となっていることに注意しましょう。
すると，左辺は,

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

となります。この右辺は分母が異なりますから，通分しましょう。
　今の場合は分母どうしをかけた $\sin\theta\cos\theta$ とすればいいですね。よって，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

となり，分子は相互関係から 1。
　おや，問題の右辺が得られました。

解答例
証明

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\\ &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=(\text{右辺})\end{aligned}$$

(証明終)

(解答例終)

練習 290　次の等式を証明せよ。
(1)　$\sin^2\theta-\sin^4\theta=\cos^2\theta-\cos^4\theta$
(2)　$\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

24.5　三角関数のグラフ

　先に説明したように，角として一般角を考えると，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ などは関数として考えることができます。
　この節では，三角関数のグラフがどうなっているのかを説明しましょう。

24.5.1　正弦関数のグラフ

　基本的には，はじめて 1 次関数や 2 次関数のグラフを描いたときのようにやります。つまり，θ の値をいろいろ変化させ，それに対応する値を求め，それらを座標に持つ点をグラフ用紙に書き込んでいくわけです。
　最近では三角関数のグラフを一つの命令で描いてくれるようなソフトウエアもありますし，マイクロソフト社の Excel に代表されるような表計算ソフトを用い

ても簡単に描けます。手元にそういった環境のある人は，是非自分でグラフを描かせてみてください。

さて，そういったソフトなどを用いると，たとえば正弦関数 $y = \sin\theta$ のグラフは図 24.1 のようになります。

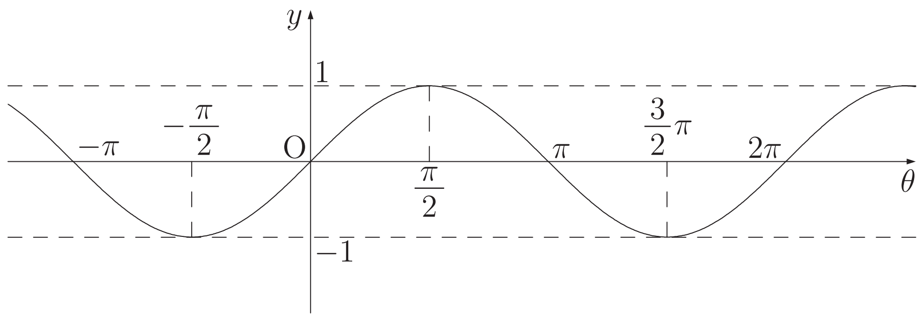


図 24.1: $y = \sin\theta$ のグラフ

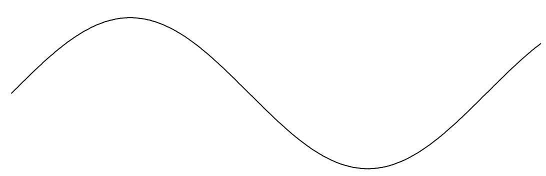
グラフの様子は，1 次関数や 2 次関数 (これらを **整関数** ということがあります) と大きく異なっていますね。 **整関数**

まず，グラフは $y = -1$ と $y = 1$ で表せる (x 軸に平行な) 直線の間に収まっています。これは，595 ページで触れた正弦関数の値域が

$$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

であることの反映です。

また，グラフは $x = 0$ から $x = 2\pi$ までの間の形



が繰り返されています。図 24.1 では想像しにくいかもしれませんが，x の範囲をもっと広く取れば確認できます。

問 169 グラフを描いて，確かめよ。

これは，公式

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$

の反映です。厳密にいうと，上の形をいくつか合わせたものが繰り返されているといっても構いません。これについては，次に説明しましょう。

周期関数　上で復習したように，正弦関数には，

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$

という性質がありました。

一般に関数 f について，等式

$$f(x+p) = x$$

が定義域のすべての x に対して成り立つような 0 でない定数 p があるとき，f を **周期関数** といい，p をその **周期** といいます。 **周期関数** **周期**

今，関数 f が p を周期とする周期関数であるとすると，

$$f(x+p) = f(x)$$

がすべての x について成り立ちます。このとき

$$f(x+2p) = f((x+p)+p) = f(x+p) = x$$

がすべての x について成り立つので，$2p$ も周期であることがわかります。また，x のかわりに $x-p$ を代入すると，

$$f(x) = f(x-p) = f(x+(-p))$$

つまり，

$$f(x+(-p)) = f(x)$$

なので，$-p$ も周期であることがわかります。

数学的帰納法によって，次の定理が成り立つことがわかります。

定理 (周期の性質)

関数 f が周期 p を持つ周期関数ならば，np $(n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ も周期である。

問 170 上の定理を証明せよ。

また，次の定理も成り立ちます。

定理 (基本周期の存在)　定数でない連続関数 f が周期関数であって，P をその周期全体とする。このとき正の最小周期 p が存在し，集合 P は次のように表せる。

$$P = \{np \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

注意　定理「基本周期の存在」の仮定にある「連続関数」という概念は，微分法のところで説明します。

それゆえ，この定理を今証明することはできません。信じてください。　**(注意終)**

この定理で保証される正の最小周期を **基本周期** といいます。単に周期といえば，基本周期を指していることが多いようです。わたしもこの習慣に倣った言葉遣いをするでしょう。 **基本周期**

このことばを用いれば,

正弦関数は基本周期 2π をもつ周期関数である

ということができます。

24.5.2　余弦関数のグラフ

同様にして，余弦関数 $y = \cos\theta$ のグラフは図 24.2 のようになります。

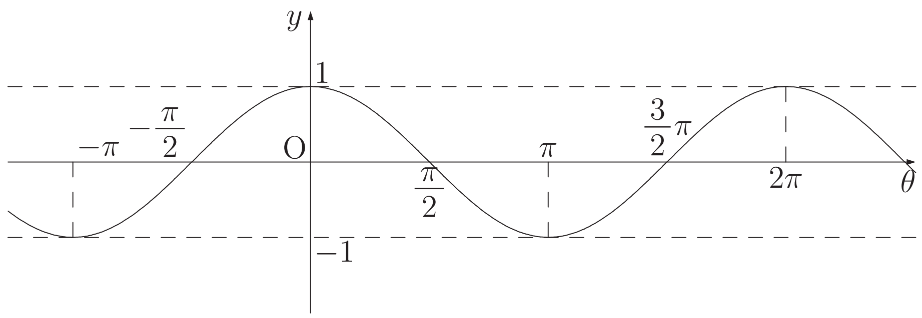


図 24.2: $y = \cos\theta$ のグラフ

正弦関数と同じように，グラフは $y = -1$ と $y = 1$ の間に収まっていますし，

正弦関数は基本周期 2π をもつ周期関数

です。

偶関数と奇関数　正弦関数や余弦関数の性質を表現する，もう一つの概念を紹介しておきましょう。

正弦関数の性質の中に

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

というものがありました。

また，余弦関数の性質の中に

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

というものもありました。
これらを一般的に表現しましょう。

定義 (奇関数，偶関数)　すべての x に対して，

$$f(-x) = -f(x)$$

を満たす関数 f を **奇関数** という。 **奇関数**
また，すべての x に対して

$$f(-x) = f(x)$$

を満たす関数 f を **偶関数** という。 **(定義終)** **偶関数**

このとき，

奇関数のグラフは原点に関して対称
偶関数のグラフは y 軸に関して対称

になっています。

補注　偶関数，奇関数ということばは，$y = x^n$ からきているのでしょう。
実際，指数が偶数の $y = x^2$ や $y = x^4$ などは上の偶関数の定義を満たしていますし，それらのグラフが y 軸に関して対称であることは既によく知っています。また指数が奇数の $y = x^3$, $= x^5$ などについても同様で，これらは奇関数の定義を満たします。**(補注終)**

正弦関数，余弦関数のグラフの特徴のまとめ　以上のことから，正弦関数と余弦関数のグラフの特徴をまとめると，次のようになります。

1. 正弦関数，余弦関数のグラフはいずれも二直線 $y = -1$ と $y = 1$ にはさまれた部分にある。(これを **振幅は 1 である** ということがあります。) **振幅**
2. 正弦関数，余弦関数のいずれも 2π を周期とする周期関数である。
3. 正弦関数は奇関数，余弦関数は偶関数である。

二番目の特徴を言い替えると，

2′. グラフを x 軸方向へ 2π 平行移動すると，もとのグラフと重なる。

となります。
$\cos\theta = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ という公式から，さらに次のこともわかります。

4. 余弦関数のグラフは，正弦関数のグラフを x 軸方向へ $-\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。

つまり

正弦関数のグラフと余弦関数のグラフは合同

です。

24.5.3　正接関数のグラフ

正接関数のグラフは図 24.3 のようになります。

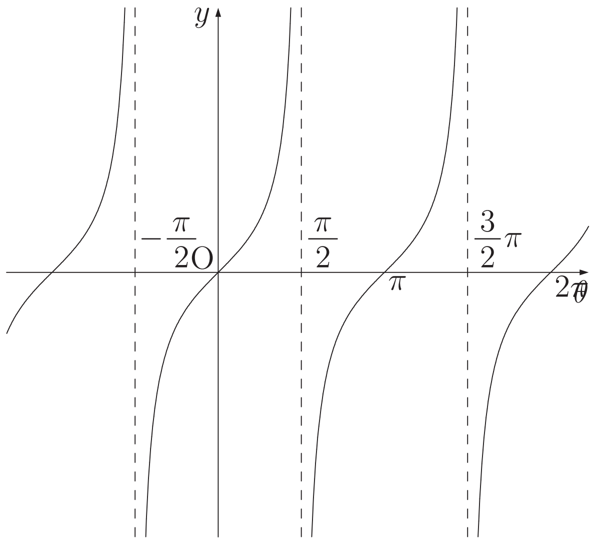


図 24.3: $y = \tan\theta$ のグラフ

このグラフからわかるように，正接関数のグラフには次のような特徴があります。

1. 定義域は $\left\{\theta \mid \theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}\ (n \in \mathbb{Z})\right\}$ であり，値域は実数全体。
2. 直線 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}\ (n \in \mathbb{Z})$ は，漸近線である。
3. 正接関数は周期 π を持つ周期関数である。
4. 正接関数は奇関数。

24.6　いろいろな正弦関数のグラフ——正弦曲線

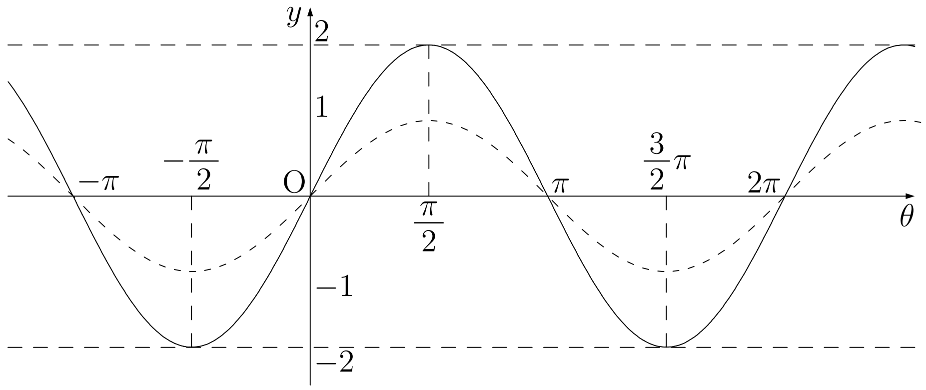
24.6.1　いろいろな正弦関数のグラフ

正弦関数を用いたいろいろなグラフを描いてみましょう。

例　$y = 2\sin\theta$ のグラフ

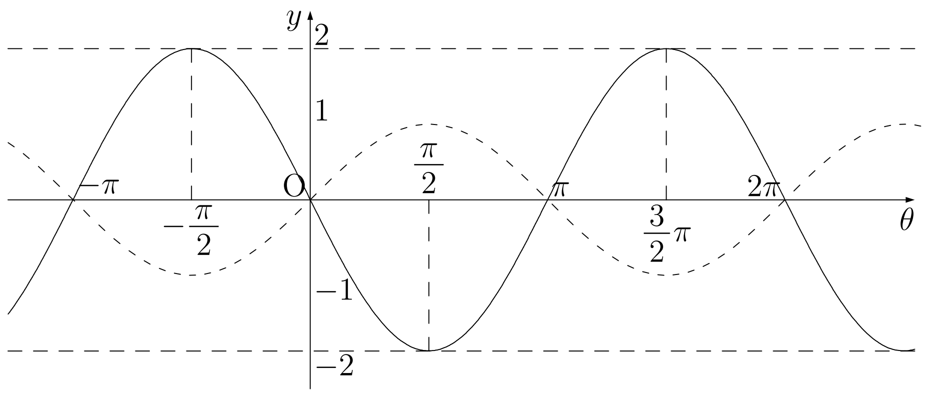
一般に $(x,\ y)$ という座標を持つ点に対して，$(x,\ 2y)$ という座標を持つ点は，y 軸方向へ 2 倍に引き伸ばしたものと考えられます。

つまり $y = 2\sin\theta$ のグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを y 軸方向へ 2 倍に引き伸ばしたものとして描くことができます。これより，次のようになることがわかります。



参考のために $y = \sin\theta$ のグラフを点線で入れておきました。 **(例終)**

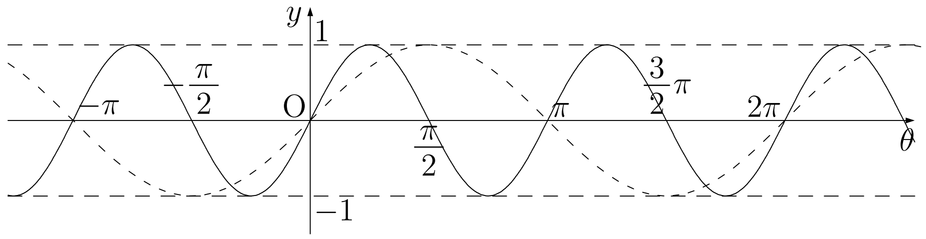
練習 291 $y = -2\sin\theta$ のグラフは，下の図のようになることを確かめよ。



例　$y = \sin 2\theta$ のグラフ

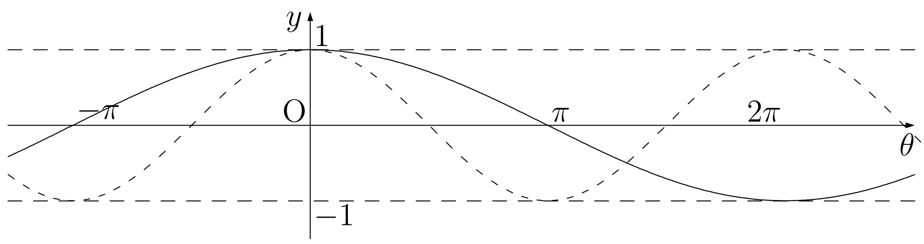
先の例と同じような式ですが，こちらは θ を 2 倍していることに注意してください。描いてみればわかるように，このグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍したものになっています。

よって，周期は π です。



(例終)

練習 292 $y = \cos\dfrac{\theta}{2}$ のグラフは，次のようになることを確かめよ。また，周期はいくらか。



この例からわかるように，

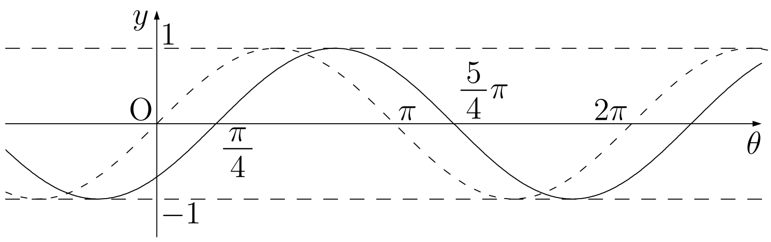
$$y = \sin a\theta \text{ **の周期は** } \frac{2}{a}\pi$$

となります ($y = \cos a\theta$ も同様です)。

例 $y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフ

$y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向へ $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものになります。

よって，周期は変わらず 2π で，グラフは次のようになります。



(例終)

練習 293 $y = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフを描け。

24.6.2 研究課題

$y = \sin\theta + 2\sin\theta$ のグラフはどうなるでしょうか。

また $y = \sin\theta + \sin 2\theta$ のグラフはどうでしょう。

さらに，項の数がもっと増えたり，正弦関数と余弦関数が混ざっていたらどうですか。

24.6.3　三角関数の不等式

例題 112　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$ となる θ の値の範囲を求めよ。

解説　2 次不等式を解くときに同様のことをしています。その際には，2 次関数をうまく使いました。

本題の場合は，三角関数を用いるわけです。

で，まずは $0 \leqq \theta < 2\pi$ という範囲で $y = \cos\theta$ のグラフを描きます。

また，$\cos\theta > \dfrac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ，というのですから，x 軸に平行な直線 $y = \dfrac{1}{2}$ を引きます。

この直線よりグラフが上にある θ の範囲が，求める解になっています。

そのためには方程式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

も解いておく必要があります。$0 \leqq \theta < 2\pi$ という範囲で解くと，

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{3}\pi$$

を得ます。これが，解答例中のグラフと直線の交点を与えます。

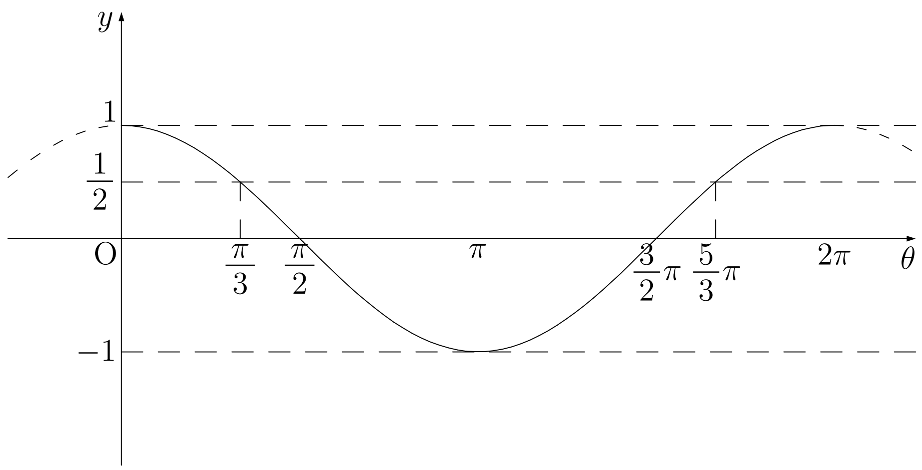
解答例　方程式

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

を解くと，

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{3}\pi$$

また，グラフを描くと次のようになる。



これより，

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(解答例終)

練習 294 $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1) $\sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(2) $\cos\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3) $0 < \tan\theta < \sqrt{3}$

24.7 加法定理

24.7.1 正弦，余弦の加法定理

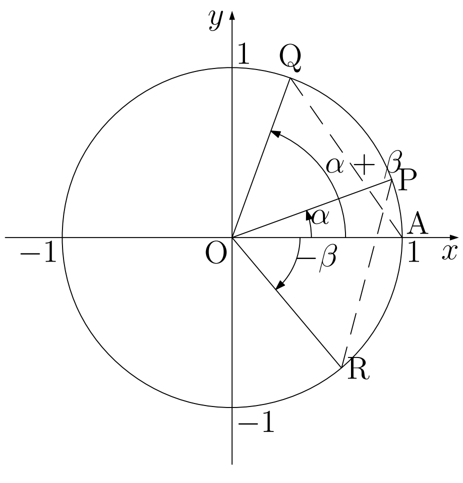
三角関数に関する重要な公式の一つに「加法定理」があります。まずは正弦関数と余弦関数の加法定理を紹介しましょう。これは，次のような定理です。

定理 (正弦，余弦の加法定理)

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
(2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
(3) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
(4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

証明　三番目の公式をまず証明する。

原点 O を中心とする単位円を考え，α に対する動径を OP，$\alpha+\beta$ に対する動径を OQ とする。また，$-\beta$ に対する動径を OR とする。



このとき，P$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，Q$(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$，R$(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$ である。

さらに A(1, 0) とする。すると，△ OAQ≡△ ORP。よって，AQ=RP なので，

$$\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha+\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$$

この両辺を展開して，整理する。$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ という性質に注意しながらそれぞれの辺の展開を実行すると，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \cos^2(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)+1+\sin^2(\alpha+\beta)\\
&= -2\cos(\alpha+\beta)+2\\
(\text{右辺}) &= \cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\\
&= -2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta+2
\end{aligned}$$

よって，

$$-2\cos(\alpha+\beta)+2=-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta+2$$

これを整理すれば，求める式を得る。

問 171 上の「△ OAQ≡△ ORP」および,「これを整理すれば，求める式を得る」をきちんと書き下せ。

さて，(3) の両辺の β を $-\beta$ で置き換え，$\sin(-\beta)=-\sin\beta$, $\cos(-\beta)=\cos\beta$ という性質を用いれば (4) を得る。

問 172 確かめよ。

さらに，(3) の α を $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ で置き換え，$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$ を用いれば，(1) を得る。

問 173 確かめよ。

また (1) で，β を $-\beta$ で置き換えれば，(2) を得る。

問 174 確かめよ。

(証明終)

例

$$
\begin{aligned}
\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\
&= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\
\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}
$$

(例終)

練習 295 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\cos 75^\circ$　　(2) $\cos 15^\circ$　　(3) $\sin \dfrac{7}{12}\pi$

例題 113 α が鋭角，β が鈍角で $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

解説　ここまでの話の復習と，三角関数の加法定理の練習を兼ねた問題です。

$\sin(\alpha+\beta)$ などを計算するには，$\cos\alpha$, $\sin\beta$ の値の他に，$\sin\alpha$, $\cos\beta$ の値が必要になります。しかしこれらの値を求める方法はすでに知っていますので，それを用いればすみます。

あとは，加法定理を用いるだけです。

解答例　α が鋭角なので，$\sin\alpha > 0$。よって，

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3}{5}$$

また，β は鈍角なので $\cos\beta < 0$。よって，

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\
&= \frac{3}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{4-3\sqrt{3}}{10} \quad \cdots \textbf{(答)} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\
&= \frac{4}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{-3-4\sqrt{3}}{10} \quad \cdots \textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

(解答例終)

練習 296 α が第一象限の角，β が第三象限の角で，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

24.7.2 正接の加法定理

正弦，余弦の加法定理を用いると，正接の加法定理が簡単に計算できます。

定理 (正接の加法定理)

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(2) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

証明

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha+\beta} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad (\text{分母分子を } \cos\alpha\cos\beta \text{ で割った}) \\
&= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}
$$

(証明終)

問 175 「正接の加法定理」(2) を証明せよ。(方法は二つ。一つは上の証明を書き直すもの，もう一つは (1) を用いるもの。両方ともやってみよ。)

例

$$\begin{aligned}
\tan 15^\circ &= \tan(60^\circ - 45^\circ) \\
&= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \\
&= 2 - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

(例終)

問 176 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ を用いて，$\tan 15^\circ$ を計算してもよかったはず。上の例で，それを用いなかったのはなぜか。

練習 297 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\tan 75^\circ$　　(2) $\tan 105^\circ$

24.7.3 二倍角の公式

加法定理で $\beta = \alpha$ とすると，次の「二倍角の公式」が得られます。

系 (二倍角の公式)

(1) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - \sin^2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

注意　加法定理を $\cos 2\alpha$ に適用すると，上のはじめの等式 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ を得ます。残りは，これに $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ から得られる $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ などを代入すれば結論を得ます。 **(注意終)**

問 177 系「二倍角の公式」を証明せよ。

例題 114 等式

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$$

を証明せよ。

解説　「二倍角の公式」の練習です。素直に計算すれば，証明が書きあがります。

解答例

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha \\
&= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha \\
(\text{右辺}) &= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned}
$$

(解答例終)

練習 298 等式

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$$

を証明せよ。

練習 299 次の等式「三倍角の公式」を証明せよ。
(1) $\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$
(2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

24.7.4 半角の公式

「二倍角の公式」において α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えると，つぎの「半角の公式」を得ます。

系 (半角の公式)
(1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$
(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$
(3) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

注意　ここまでの公式と違い，2 乗の形の値を与えていることに注意してください。そのため実際に使うときには，θ が第何象限の角かを確かめながら使うことになります (後の例参照)。 **(注意終)**

証明　「倍角の公式」(2) の $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ で，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えると，

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

これを $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ について解けば，(1) を得る。

問 178 上の「これを $\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$ について解けば，(1) を得る」を書き下せ。

同様にして，(2)，(3) を得る。

問 179 証明せよ。

(証明終)

例 $15^\circ = \dfrac{30^\circ}{2}$ なので，半角の公式を用いてこの角度の三角関数の値が計算できます。

15° は第一象限の角なので，$\sin 15^\circ > 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

ちょっと計算が面倒ですね。しっかりと変形を追いかけてみてください。途中で二重根号をはずしています。 **(例終)**

練習 300 「半角の公式」を用いて 15° の余弦と正接を求めよ。

練習 301 22.5° の正弦，余弦，正接の値を求めよ。

24.7.5 三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$ の形の式は，次のように変形できることが知られています。

定理 (三角関数の合成)

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，α は次の二つの式を満たす角である。

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

証明　座標平面上に点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ をとる。$r = \mathrm{OP} = \sqrt{a^2+b^2}$ とし，OP と x 軸の正の部分とのなす角を α とすると，

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\alpha$$

である (図を描け!)。このとき，

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= (r\cos\alpha)\sin\theta + (r\sin\alpha)\cos\theta \\ &= r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) \\ &= r\sin(\theta+\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

(証明終)

注意　定理「三角関数の合成」が使えるのは，正弦，余弦とも同じ角度の場合であることに注意しましょう。

また，定理中で必要になる α は OP と x 軸の正の部分とのなす角なので，図を描いて求めた方が早いですね。 **(注意終)**

このような式変形を **三角関数の合成** といいます。 **三角関数の合成**

例題 115　$\sin\theta + \cos\theta$ を合成せよ。

解説　ここでは省略しますが (手抜きというなかれ (笑))，まずは図を描きましょう。

定理の証明における P の座標は本例題の場合 $(1,\ 1)$ になります。よって，α は $\frac{\pi}{4}$ であることがすぐにわかります。

解答例

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

(解答例終)

練習 302　$-\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ を合成せよ。

24.7.6　和・差と積の公式

積を和に直す公式

　特殊な形の三角関数の積は，変形できます。

定理 (積を和に直す公式)

(1) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

(2) $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

(3) $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

(4) $\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

証明　三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

の辺々を加えると，

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

を得る。両辺を 2 で割って，

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

を得る。

　残りも同様。　**(証明終)**

問 180 定理「積を和に直す公式」の残りを証明せよ。

例

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ \sin 15^\circ &= \frac{1}{2}\{\sin(75^\circ+15^\circ)-\sin(75^\circ-15^\circ)\}\\ &= \frac{1}{2}(\sin 90^\circ - \sin 60^\circ)\\ &= \frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

(例終)

練習 303 次の値を計算せよ。

(1) $\sin 75^\circ \cos 45^\circ$　　(2) $\cos 105^\circ \sin 45^\circ$

(3) $\cos 135^\circ \cos 15^\circ$　　(4) $\sin 15^\circ \sin 45^\circ$

和・差を積に直す公式

特殊な形の三角関数の和や差は変形できます。

定理 (和・差を積に直す公式)
(1) $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
(2) $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$
(3) $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$
(4) $\cos A - \sin B = -2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

証明　「積を和に直す公式」で $\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ とおくと,

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

あとは，これらを「積を和に直す公式」に代入すればよい。 **(証明終)**

問 181 確かめよ。

例

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ - \cos 15^\circ &= -2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\\ &= -2\sin 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= -2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(例終)

練習 304 次の値を計算せよ。
(1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$　　(2) $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$
(3) $\cos 105^\circ + \cos 165^\circ$

24.8 さらに勉強するために

本章は公式のオンパレードになりました。
「はじめに」にも書きましたが，もっとも重要な公式は「相互関係」と「加法定理」，そして「合成の公式」です。

それ以外のものは，必要に応じて導けるようになっておけば十分です。
「合成定理」や「和・差と積の公式」は物理で波動などを扱うとき，数学ではフーリエ級数などを扱う (波動現象の数学的解釈の一例) ときによく用いられます。
三角関数のさらに詳しい性質は，微積分を用いてなされます。