補 講5　整式の次数について

5.0　はじめに

第 2 章のはじめの節の最後に,「普通の数の次数は何次と考えるべきだろうか？」と書きました。そこでは，普通の数には文字が含まれていないのだから，次数は0と考えるだろう，ということでひとまずおさめておきました。

ここではこれについて，少しきちんと検討しておくことにします。

5.1　整式の積と次数

整式の次数は，それを構成する単項式の中でもっとも次数の高いものでしたから (もちろん同類項はまとめた後でのことです)，問題を簡単にするために，単項式で考えましょう。

単項式の積の計算のところで，指数法則というものを紹介し，その中に次の式がありました。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ここで a^m の次数は m，a^n の次数は n ですから，

$$（積\ a^m \times a^n\ の次数）=（a^m\ の次数）+（a^n\ の次数）$$

となっています。

今は，文字が一種類のときを考えましたが，何種類あっても同様です。つまり，二つの単項式 A, B について，

$$（積\ AB\ の次数）=（A\ の次数）+（B\ の次数）$$

が成り立ちます。

先に注意したように，整式の次数は，それを構成する単項式の最高次数ですから，一般に式 A の次数を m ，式 B の次数を n とするとき，その積 AB の次数は $m+n$ ，つまり

$$（積\ AB\ の次数）=（A\ の次数）+（B\ の次数）$$

が成り立ちます。

ここまで「成り立ちます」と言い切ったのですが，実は，この議論には一か所だけ問題があります。

それは A あるいは B の一方だけが 0 の場合です。どちらが 0 でも同じ議論になりますので，A が 0 だとしましょう。このとき $AB = 0 \times B = 0$ であり，この次数は 0。よって上の式は

$$0 = 0 + n$$

となり，これは n が 0 のとき以外は成り立ちません。

なぜこんなことになってしまったのでしょう?

それはひとくくりに,「数の次数は 0」としたことにあります。

つまり 0 以外の数に対して次数を 0 と定義することはなんら問題がありませんが，数 0 に対して次数が 0 と定義すると問題が起こるのです。みなさんは，A が 0 でない定数のとき，

$$（積\ AB\ の次数）=（A\ の次数）+（B\ の次数）$$

が成り立つことを確認してください。

しかしこれは 0 以外にはおきない，つまり例外的なものです。

しかし上に挙げた次数に関する性質

$$（積\ AB\ の次数）=（A\ の次数）+（B\ の次数）$$

は実にきれいな性質です。0 のときだけ成り立たないからといって，これを捨てるのはちょっともったいない感じがします。

そこで二つの立場が考えられます。一つは数 0 については次数を考えない，というもの。もう一つは何らかの方法で上の性質にマッチするように 0 の次数を定義する，というものです。

もちろん後者がいつでも見つかるというわけではありませんが，今の場合はうまく定義できることが知られています。

それは,「0 の次数は $-\infty$ である」と定義するものです[1]。

もちろんこれだけでは何の意味もありません。通常 $-\infty$ は数と考えません。しかし，こういった場合には一種の数のように **考えて**，次のように計算すると約束します。

$$-\infty + n = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty$$

ここで n は整数 (もっと一般に実数) とします。

このように定義すると，

$$（0\ の次数）+（B\ の次数）= -\infty + n = -\infty$$

[1] ∞ は「無限大」と読んでください。
ですから $-\infty$ は「マイナスむげんだい」と読むことになります。

となり，左辺は 0 の次数でこれは $-\infty$ に等しいので，すべての場合に

$$（積\ AB\ の次数）＝（A\ の次数）＋（B\ の次数）$$

が成り立つようになります。