補 講6　整式の除法の原理の証明

6.1　整式の場合の除法の原理

本文で触れましたように，整式のときにも「除法の原理」が成り立ちます。それは次のような定理でした。

定理 (除法の原理)　整式 A を整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とするとき，　**除法の原理**

$$A = BQ + R$$

ただし，$R = 0$ または（R の次数）$<$（B の次数）

第 1 章「整数の性質」の補講で与えた定理と同じように，これは次のように表現できます。

定理 (除法の原理)　$A(x),\ B(x)$ を x に関する整式とする。このとき，

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

ただし，（$R(x)$ の次数）$<$（$B(x)$ の次数）
を満たす整式 $Q(x),\ R(x)$ がただ一組だけ存在する。

後の方の表現が「x に関する整式」となっていること，ただし書きから「$R = 0$」がなくなっていることに注意してください。

「x に関する整式」としたのは,「除法の原理」をより正確に表現するためです。

また後者は，先の補講で説明したように，0 の次数を $-\infty$ と定めれば，R が 0 であっても「（$R(x)$ の次数）$<$（$B(x)$ の次数）」が成り立つ，という事情から表現が簡単になったのです。

6.2　「除法の原理」の証明

それでは「除法の原理」の証明を与えましょう。

証明　A の次数を m，B の次数を n とする。

$m < n$ のときは，$Q(x) = 0,\ R(x) = A(x)$ とすれば

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

が成り立つ。

$m \geqq n$ のとき，$A(x)$ の最高次の係数を a_m，$B(x)$ の最高次の係数を b_n とすると，

$$A(x) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}B(x)$$

の次数は $m-1$ となる。

$m-1 \geqq n$ なら，$A_1(x) = A(x) - \dfrac{a_m}{b_n}x^{m-n}B(x)$ として，同じことをすれば，$m-2$ 次の整式 $A_2(x)$ が得られる。

これを繰り返せば，必ず n より低い次数の整式が得られ，それを $R(x)$ とすれば，

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

となる。

よって定理を満たす $Q(x),\ R(x)$ が存在する。

次に定理を満たす $Q(x),\ R(x)$ が二つあったとする。つまり

$$B(x)Q_1(x) + R_1(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

とする。移項して

$$R_1(x) - R_2(x) = B(x)\{Q_2(x) - Q_1(x)\}$$

左辺の次数は B の次数より小さいが，右辺は B の次数以上。これは両辺とも 0 の場合しかありえない。

つまり

$$R_1(x) - R_2(x) = 0,\ B(x)\{Q_2(x) - Q_1(x)\} = 0$$

よって

$$R_1(x) = R_2(x),\ Q_2(x) = Q_1(x)$$

つまり定理を満たす $Q(x),\ R(x)$ はただ一組。 **(証明終)**