補 講7　平方根の大小

7.0　はじめに

67 ページで，

定理 (平方根の大小)　$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ とする。このとき

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

という定理を紹介しました。そこでは，この定理が正しいことを，図形を用いて感じとってもらいました。

この補講では，式を用いて，厳密に証明しておきましょう。「不等式の性質」を仮定します。

7.1　「平方根の大小」の証明

平方根を考えていますので，$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ が (暗黙のうちに) 仮定されていることに注意してください。

まずは $\Longrightarrow$，つまり，

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

の証明をしましょう。

一般に，$a = (\sqrt{a})^2,\ b = (\sqrt{b})^2$。よって，

$$0 < b - a = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$$

つまり，

$$(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$$

$\sqrt{a} \geqq 0,\ \sqrt{b} > 0$ より，$\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$。上の不等式を $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ で割ると，

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$$

ゆえに，

$$\sqrt{a} < \sqrt{b}$$

逆に，$\sqrt{a} < \sqrt{b}$ とすると，$\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$ で，また，$\sqrt{a} \geqq 0$, $\sqrt{b} > 0$ より，$\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$。よって，

$$(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > 0$$

一方，

$$b - a = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$$

なので，$b - a > 0$。すなわち，

$$a < b$$

7.2　定理の一般化

この定理は，次の形で述べられることもあります。実は同じことをいっているのですが，ピンときますか?

定理 (平方の大小)　$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき，

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 < b^2$$

証明は,「平方根の大小」の証明とまったく同様ですので，復習を兼ねて書き下してみてください。

実は，この定理は次のように一般化できます。

定理 (n 乗の大小)　$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき，

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^n < b^n$$

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \cdots + b^2a^{n-3} + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

という式を使えば，証明できますので，考えてみてください。