補 講9　分数が循環小数になること

9.0　はじめに

89 ページで,「どんな分数も，有限小数あるいは循環小数に直すことができる」という定理を紹介しました。

この補講では，この定理の証明を与えます。

9.1　証　明

第 1 章「整数の性質」で説明しましたように，次の定理が成り立ちます。

定理 (除法の原理)　整数 a を整数 b で割ったときの，商を q，余りを r とするとき，　**除法の原理**

$$a = bq + r$$

ただし，$0 \leqq r < b$

分数 $\dfrac{n}{m}$ を小数に直していくとき，$n \div m$ を計算するわけですが，商を立てるたびに余りが出ます。

もしこの余りの中に 0 が出てくれば，計算はそこで終わり。つまり小数は有限です。

この余りの中に，まったく 0 が現れないとしましょう。

すると $0 < r < b$ で，r は整数ですから，r は 1，2，$\cdots$，$b-1$ の $b-1$ 個のうちの一つの値をとります。

ということは，b 回割り算を計算すれば，その中には必ず同じ余りが出現しなければなりません。

よって，商はそこから同じ値を繰り返しとることになります。