補 講13　集合の直積

13.0　はじめに

第5章「集合」で集合に関するいくつかの計算方法を紹介しました。

この補講ではさらにもう一つ紹介しましょう。それは「直積」と呼ばれるものです。

13.1　集合の直積

定義 (集合の直積)　二つの空でない集合 $A,\ B$ に対して

$$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

を A **と** B **の直積** という。　**(定義終)**　**直積**

注意　上のように書くとわかりにくいかもしれません。が，A と B の直積とは集合 A の要素と集合 B の要素の組全体の集合のことです。次の例をよく見て感じをつかんでください。　**(注意終)**

例　$A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{a,\ b\}$ とするとき，

$$A \times B = \{(1,\ a),\ (2,\ a),\ (3,\ a),\ (1,\ b),\ (2,\ b),\ (3,\ b)\}$$

(例終)

上の例では感じをつかみやすくするために A と B をまったく異なるものにとりましたが，$A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{1,\ 2\}$ であっても同じようにして直積 $A \times B$ を作ることができます。

練習 306 $A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{1,\ 2\}$ とするとき，直積 $A \times B$ を要素をすべて書き並べる方法で表せ。

注意　$A,\ B$ がともに有限集合であるとき，

$$(A \times B \text{ の要素の個数}) = (A \text{ の要素の個数}) \times (B \text{ の要素の個数})$$

が成り立っていることに注意してください。 **(注意終)**

さてここまでは異なる二つの集合の直積を考えてましたが，これは同じでもかまいません。たとえば $A = \{1,\ 2\}$ のとき

$$A \times A = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)\}$$

となります。

A が数 a なら，$a \times a = a^2$ と表します。そこでこれを真似して，

$$A \times A = A^2$$

と表すことにしましょう。

ところで座標平面上の点は二つの実数の組である座標によって表されました。言い換えると座標平面は二つの実数の組を要素とする集合です。つまり

$$\{(x,\ y) |\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

という集合ですね。この集合は，直積の定義に従うと $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と書け，さらに上の約束を使えば $\mathbb{R}^2$ と表すことができます。

これが本文で

> つまり
>
> $$\mathbb{R}^2 = \{(x,\ y) |\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$
>
> このようにおくと，座標平面は $\mathbb{R}^2$ のことであると考えることができる。

と書いた理由です。

最後に，後で使いたいので，一般的な直積の定義を書いておきましょう。

定義 (n 個の集合の直積)　n 個の空でない集合 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ に対して

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

を $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ **の直積** という。 **(定義終)**

注意　上の定義の中で右辺の「$a_i \in A_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$」という部分がちょっとわかりにくいかもしれないので補足しておきましょう。これは,「i が 1 から順番に n までの値を取るとき，$a_i \in A_i$ が成り立っている」という意味です。言い換えれば「$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ である n 個の値のすべてについて $a_i \in A_i$ が成り立っている」ということです。

こんな書き方もあるんだという例示をこめてあえて使ってみました。徐々に慣れてください。

また上の n 個がすべて同じ集合 A であるとき，A^n と表します。これは数 a の n 個の積を a^n と表したのと同様です。 **(注意終)**

練習 307 $A=\{1,\ 2\},\ B=\{1,\ 2\},\ C=\{a,\ b,\ c\}$ とするとき，直積 $A\times B\times C$ を要素を書き並べる方法で表せ。

注意　二つの集合の直積のときと同じく，$A_1,\ \cdots,\ A_n$ がすべて有限集合であるとき，

$$(A_1\times\cdots\times A_n \text{ の要素の個数}) = (A_1 \text{ の要素の個数})\times\cdots\times(A_n \text{ の要素の個数})$$

が成り立っています。 **(注意終)**

注意　第 1 章「整数の性質」において，素因数分解を用いて与えられた整数のすべての約数を求めるということをやりました。その際にそれぞれの素因数の指数の組を作りました。

たとえば 72 の約数を求める場合，$72=2^3\times3^2$ であることから，

$$\begin{array}{cccc}(0,0), & (1,0), & (2,0), & (3,0)\\(0,1), & (1,1), & (2,1), & (3,1)\\(0,2), & (1,2), & (2,2), & (3,2)\end{array}$$

という組を作りました。これは直積という言葉を使えば，素因数 2 の指数のとりうる値の範囲 $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ と素因数 3 の指数のとりうる値の範囲 $B=\{0,\ 1,\ 2\}$ の直積集合 $A\times B$ に他なりません。

これは与えられた整数の素因数が 3 個以上あっても同様です。

また同じく「整数の性質」の章で扱った例題なども，上の注意を用いるなら，すぐに式を立てることができ，要素の個数を簡単に計算することができます。 **(注意終)**

この結果はもう少し，一般化できます。実際次の定理が成り立ちます（証明は略す）。

定理 (約数の個数)　整数 a が $a=p_1^{m_1}\times p_2^{m_2}\times\cdots\times p_n^{m_n}$（ただし p_i らはすべて異なる）と素因数分解されるとき，約数の個数は $(m_1+1)\times(m_2+1)\times\cdots\times(m_n+1)$ 個に等しい。