補 講16　$x^n - 1$ の因数分解

16.0　はじめに

$x^n - 1 = 0$ という形の方程式は，理論的にさまざまな面白い性質を持っています。

方程式に関することは後で解説しますが，ここでは $x^n - 1$ の因数分解という整式の面から，簡単に取り上げておこうと思います。

16.1　$x^n - 1$ の因数分解

まずは簡単な計算練習からはじめましょう。

例　$x^2 - 1,\ x^3 - 1,\ x^4 - 1$ をそれぞれ因数分解してみます。

まず $x^2 - 1$ と $x^3 - 1$ は，それぞれ公式を用いれば簡単に因数分解でき，

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \\ x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

となります。　**(例終)**

$x^4 - 1$ は，$P(x) = x^4 - 1$ とおけば $P(1) = 0$ ですから，$x - 1$ で割り切れて，もう一つの因数は $(x^4 - 1) \div (x - 1)$ を計算すればよく (組み立て除法を使いましょう!　あれ，どこかで見たような計算ですね!)，

$$x^4 - 1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$$

となることがわかります。

この三つをよく観察すると，$x^5 - 1$ がどのように因数分解されるか，すぐにおわかりですね?

そう

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

となることが簡単に予想でき，実際の計算によって正しいことが確認できます。みなさんは (組み立て除法を用いて!) 必ず上の結果が正しいことを確かめておいてください。

さて，これから一般の $x^n - 1$ の因数分解がどうなるのか，見当がつきますね。

定理 ($x^n - 1$ **の因数分解**)

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

証明　色々な方法が考えられると思いますが，ここでは等比数列の和の公式を用いた証明を与えておきます。

さて，

$$1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}$$

は，初項 1，公比 x の初項から第 n 項までの和である。よって $x \neq 1$ のとき，

$$1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

分母を払うと，

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

この最後の等式は $x = 1$ の場合にも成り立つ。

よって定理は証明された。 **(証明終)**

補注　$x^4 - 1$ は $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ と因数分解できますが，ここでは $x^n - 1$ が統一された形に因数分解できることを強調したかったので，この部分については議論しません。 **(補注終)**