# 補講17　$(x-\alpha)^2$ で割り切れるための条件

## 17.0　はじめに

整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるための必要十分条件が $P(\alpha)=0$ であることは,「因数定理」が明らかにしています。

ここではその一般化である，$P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるための条件について解説します。

ここでは，微分法の知識を仮定します。

## 17.1　$(x-\alpha)^2$ で割り切れるための条件

まず必要条件を求めましょう。

つまり $P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるとしたら，どんなことが成り立つでしょうか?

$P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるので,

$$P(x)=(x-\alpha)^2Q(x)$$

と表すことができます。両辺を $x$ で微分すると,

$$P'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)$$

$x=\alpha$ を代入すると，右辺は 0。つまり

$$P'(\alpha)=0$$

$P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるということは，当然 $x-\alpha$ でも割り切れるので,$P(\alpha)=0$。

よって

$$P(x) \text{ が } (x-\alpha)^2 \text{ で割り切れる} \implies P(\alpha)=P'(\alpha)=0$$

逆は成り立つでしょうか?

今の場合は成り立ちます。

**逆の証明**　$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ とする。
まず $P(\alpha) = 0$ より，$P(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れる。よって，

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) \cdots (*)$$

と表すことができる。
両辺を $x$ で微分すると，

$$P'(x) = Q(x) + (x - \alpha)Q'(x)$$

$x = \alpha$ を代入すると，左辺は仮定より 0。右辺は $Q(\alpha)$ となるので，

$$Q(\alpha) = 0$$

よって，因数定理より $Q(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れる。つまり $Q(x) = (x - \alpha)Q_1(x)$ と表すことができる。これを $(*)$ に代入すれば，

$$P(x) = (x - \alpha)^2 Q_1(x)$$

つまり $P(x)$ は $(x - \alpha)^2$ で割り切れる。

以上のことをまとめると，次の定理となります。

**定理 ($(x - \alpha)^2$ で割り切れるための条件)**

$$P(x) \text{ が } (x - \alpha)^2 \text{ で割り切れる} \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$$

この定理は $(x - \alpha)^n$ で割り切れるための条件に一般化できます。考えてみてください。