補 講 18　コーシー・シュヴァルツの不等式の証明

18.0　はじめに

この補講では一般の場合のコーシー・シュヴァルツの不等式

定理 (コーシー・シュヴァルツ)　$a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_n$ を実数とするとき

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

の証明を与えます。
知識としてベクトルの内積，2 次不等式のある性質を仮定します。

18.1　一般的なコーシー・シュヴァルツの不等式の証明

2 次元の数ベクトル空間において，二つのベクトル $\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ の成分をそれぞれ

$$\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2),\quad \overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2)$$

とするとき，その内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ は，

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

で計算できました。このとき内積の性質として次のものが成り立ちます。

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geqq 0,\quad \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$$

このとき，任意の t に対して

$$(\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}) \geqq 0$$

の成り立つことが第一の式からわかり，左辺を展開すると，

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + 2(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})t + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b})t^2 \geqq 0$$

が成り立つことが導かれます。

今 t は任意なので，(左辺)$=0$ とおいた t に関する 2 次方程式の判別式を D とすると，$D/4 \leqq 0$。よって，

$$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}) \leqq 0$$

つまり

$$(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2 \leqq (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b})$$

ここで内積を成分を用いて書き直せば,

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$$

これが「一般的なコーシー・シュヴァルツの不等式」の $n=2$ の場合になっています。

この証明方法のいいところは，証明の計算の部分に $\overrightarrow{a}$ が平面ベクトルであるということがまったく現れていないことにあります。

実際，$\overrightarrow{a}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ に対して，

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

と定義しますと，平面ベクトルの内積の性質がすべて成り立ちます (各自確かめてください)。つまり特に

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} \geqq 0, \quad \overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$$

が成立し，上の計算方法が使えるのです。

これで一般のコーシー・シュヴァルツの不等式が証明できました。