補 講19　共役複素数の性質と絶対値

19.0　はじめに

本文において共役複素数というものを定義しましたが，本補講ではこれに関する性質と複素数の絶対値について簡単に説明します。

19.1　共役複素数の性質

本問の説明だけだと，何のために共役複素数などというものを定義したのかあまりピンとこないかもしれません。大分後になると思いますが，実は——実数を数直線で表したのと同じように——複素数を図形的に表すことができ，そのとき与えられた複素数の共役を考えることの重要性がはっきりします。

それはそれとして，まずは共役複素数の代数的な性質をまとめておきましょう。

定理 (共役複素数の性質)

共役複素数について次の性質が成り立つ。

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(5) z が実数 $\Longleftrightarrow \overline{z}=z$

証明　(1) $z_1=a_1+b_1 i,\ z_2=a_2+b_2 i$ とすると $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ であった。よって $\overline{z_1+z_2}=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i$。

一方 $\overline{z_1}=a_1-b_1 i,\ \overline{z_2}=a_2-b_2 i$ であるから，$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i$。

ゆえに $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$。

(5) $z=a+bi$ とすると

$$\begin{aligned}\overline{z}=z &\iff a-bi=a+bi\\ &\iff -b=b\\ &\iff b=0\\ &\iff z\text{ は実数}\end{aligned}$$

問 190 (2)〜(4) を証明せよ。

(証明終)

系 (共役複素数の n 乗)
n を自然数とするとき，$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

これらを使うと次のことが証明できます。

定理 (実数係数の２次方程式の解の性質)　実数係数の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が虚数解 α を持てば，その共役な複素数 $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解である。

証明　$a(\overline{\alpha})^2 + b\overline{\alpha} + c = 0$ を証明すればよい。
まず α が与えられた２次方程式の解なので

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

両辺の共役複素数を取ると

$$\overline{a\alpha^2 + b\alpha + c} = \overline{0}$$

上の定理と系を用いると (実数係数ということは $a,\ b,\ c$ は実数である！),

$$a(\overline{\alpha})^2 + b\overline{\alpha} + c = 0$$

よって $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解である。　**(証明終)**

この定理は一般化できます。つまり，ここでは２次方程式で話をしたのですが，これは n 次方程式としてもよい (もちろん係数は実数です)。
できればこの事実 (一般化した方) は記憶しておいてほしい。覚えておかなくても，問題を解くときに支障はきたしませんが，覚えておいて損はないでしょう。

19.2　複素数の絶対値

実数 a にはその絶対値 $|a|$ を考えることができ，いくつかの性質が成り立ちました。
複素数についても同様なものを考えることができることを，紹介しておきます。
まずは実数の絶対値をどのように定義したかを復習しましょう。

定義 (実数の絶対値)　実数 a に対して，

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{ただし } a \geqq 0\ ) \\ -a & (\text{ただし } a < 0) \end{cases}$$

と定め，これを a の **絶対値** という。 **(定義終)** **絶対値**

このように定義すると，次のことが成り立ちました。

定理 (絶対値の性質)
（1） $|a| \geqq 0$
（1）$'$ $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$
（2） $|ab| = |a||b|, \quad \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ただし $b \neq 0$
（3） $|-a| = |a|$
（4） $|a+b| \leqq |a| + |b|$ （三角不等式）

さらに平方根と次の関係で結ばれていました。

定理 (絶対値と平方根の関係) a を実数とするとき，

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

あるいは

$$|a|^2 = a^2$$

では複素数の絶対値をどのように定めたらいいでしょう。これは，次のようにします。

定義 (複素数の絶対値) 複素数 $z = a + bi$ について

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

と定め，これを z の **絶対値** という。 **(定義終)** **絶対値**

注意
(1) なぜ複素数の絶対値をこのように定義するのかは，共役複素数のときと同様すぐにピンとはこないことと思います。これも複素数の図形的な表し方と密接な関係を持っているからです。その説明は共役複素数と同じく先の楽しみとしておきましょう。
(2) a, b は実数なので，絶対値の定義式における右辺の根号の中は常に０以上。よって $|z|$ は０以上の **実数** であることに注意してほしい。
(3) z が実数のとき，つまり $z = a + bi$ で b が０のとき，z の絶対値は $\sqrt{a^2}$ に等しい。つまり，この定義は実数の絶対値の拡張になっています。

(注意終)

例 $z_1 = 1 - 2i$ のとき，$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ である。
また，$z_2 = -3$ のとき，$|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ である。 **(例終)**

練習 309 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1) $-i$　　(2) $\dfrac{1}{i}$

(3) $2-3i$　　(4) $\dfrac{1+i}{1-i}$

このとき次のことが成り立ちます。

定理 (絶対値の性質)　$z,\ z_1, z_2$ を複素数とする。

（1）$|z| \geqq 0$

（1）$'$ $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

（2）$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ ただし $z_2 \neq 0$

（3）$|-z| = |z|$

（4）$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$（三角不等式）

証明　(1), (1)$'$, (3) の証明は皆さんにお任せしよう。ここでは (2) のみを証明する (ちょっと計算が大変なので難しく感じるなら飛ばして先に進んでもよい。また (4) は今の知識では難しいので，これも少し先に延期する)。

さて，$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ とする。$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$ であるから

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2} \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned} |z_1||z_2| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} \\ &= \sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2} \end{aligned}$$

よって $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$。

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ も同様に証明できるが，ここではもう少しうまい方法でやろう。

$$\begin{aligned} |z_1| &= \left|\frac{z_1}{z_2} z_2\right| \\ &= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2| \end{aligned}$$

($|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ を用いた)

つまり

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2|$$

両辺を $|z_2|$ で割ると，求める式を得る。 **(証明終)**

注意　共役複素数についての性質

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

も $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ を使うことで証明できる。試みよ。 **(注意終)**

問 191　この性質を使って先の練習の (2)，(4) を計算せよ。