補 講20　数直線上の距離の公式の証明

20.0　はじめに

まず定理を再掲しましょう。

定理 (直線上の２点間の距離)　２点 A(a)，B(b) に対して，その間の距離 d は，

$$d = d(A,\ B) = |b - a|$$

きちんとした証明を与えようとすると，結構面倒なのが，この定理です。
本補講では，これをやってみせましょう。

20.1　証　明

まず，数直線をどのようにして作ったかをおさらいしましょう。
第４章で触れたように，数直線を作るにはまず原点 O と単位点 E の二つを定め，O に０を，E に１を対応させました。そして，OE を単位として長さを測り，点と数を対応させました[1]。このとき，O より右側の点には正の数を，左側の点には負の数を対応させました。
一方数 a の絶対値は

$$|a| = \begin{cases} a & (\ a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

と定義しました。
これらのことを突き合わせると，中学校のときの絶対値の定義が「定理」として得られることがわかるでしょう。

定理 (原点との距離と絶対値)　数直線上の点 A(a) と原点 O との距離 OA は

$$\mathrm{OA} = |a|$$

[1] ここに原点との距離が現れていることに注意!

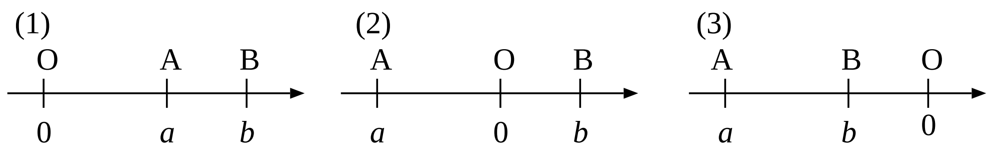
さて，我々の証明したいのは，数直線上の任意の 2 点の間の距離の公式でした。上の定理は一方が原点になっている特殊な場合になっています。

これからの方針は，この特殊な場合と数直線の作り方，絶対値の定義，性質を用いて一般の場合を証明しよう，というものです。

二つの数 $a,\ b$ については，$a > b,\ a = b,\ a < b$ のいずれか一つが必ず成り立ちました。

まず $a = b$ のときは，A と B が一致するので，AB$= 0$。一方 $|b-a| = |a-a| = 0$。よって $d(A,\ B) = |b-a|$。

次に $a < b$ の場合を考えましょう。このとき，原点 O との位置関係を考えると，次の三つの場合が考えられます。



(1) の場合，AB は OB から OA を引いたものに等しい。また $a > 0,\ b > 0$ より $|a| = a,\ |b| = b$ に注意すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \mathrm{OB} - \mathrm{OA} \\ &= |b| - |a| \\ &= b - a \end{aligned}$$

また $a < b$ より $b - a > 0$。よって $|b-a| = b-a$。
ゆえに

$$\mathrm{AB} = |b-a|$$

(2) の場合は，$\mathrm{AB} = \mathrm{OB} + \mathrm{OA}$ であり，$a < 0,\ b > 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \mathrm{OB} + \mathrm{OA} \\ &= |b| + |a| \\ &= b - a \\ &= |b-a| \end{aligned}$$

問 192 以上の議論を真似して，(3) の場合にも定理が成り立つことを証明せよ。

問 193 ここまでの議論を真似して $a > b$ の場合の証明を書き上げよ。

以上のことから

$$\mathrm{AB} = |b-a|$$

を得る。 (証明終)