補 講21　平面上の距離の性質

21.0　はじめに

この補講は大分難しいものを含んでいます。よって証明は飛ばしても構いません。

しかし将来理工系に進学するつもりのある人は，証明まで含めて理解しておいてほしい。

21.1　距離の性質

数直線上の話をしているところで，定理「距離の性質」を紹介しました。これは平面上でも成り立ちます。定理としてまとめましょう。

定理 (距離の性質)　2 点間の距離 $d(A,\ B)$ について次が成り立つ。

（1） $d(A,\ B) \geqq 0$　　特に　$d(A,\ B) = 0 \iff A = B$

（2） $d(A,\ B) = d(B,\ A)$

（3） $d(A,\ B) \leqq d(A,\ C) + d(C,\ B)$ (三角不等式)　**三角不等式**

注意　一方は直線，他方は平面と異なる対象でありながら，適切な定義によって，同じような定理が成り立つ。

もちろんその定義は，まったくかけ離れたものではなく，本文でも触れたように，平面上の距離の計算方法は，直線上のそれの拡張になっている。そこから，同様の結果が推測でき，普遍(ふへん)性が増すのである。　**(注意終)**

21.2　距離の性質の証明

2 点 A$(a_1,\ b_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ の間の距離 AB は

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

で計算することができました。これを用いて，距離の性質を証明しましょう。

(1)　まず $d(A,\ B) \geqq 0$。

これは $d(A,\ B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$ より，右辺は 0 以上であることから明らか[1]。

次に，$A=B$ なら，$a_1=b_1,\ a_2=b_2$ より，

$$\begin{aligned} d(A,\ B) &= \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_1-a_1)^2+(a_2-a_2)^2} \\ &= \sqrt{0^2+0^2} \\ &= \sqrt{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

逆に，$d(A,\ B)=0$ とすると，

$$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=0$$

両辺を 2 乗して

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=0$$

「式と証明」で触れたように

$$a^2+b^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a=b=0$$

である。よって

$$b_1-a_1=0,\quad b_2-a_2=0$$

ゆえに

$$a_1=b_1,\quad a_2=b_2$$

すなわち，$A=B$。

(2) $(a-b)^2=(b-a)^2$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned} d(A,\ B) &= \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2} \\ &\quad\ \text{(ここで上の注意を用いた)} \\ &= d(B,\ A) \end{aligned}$$

21.3 コーシー・シュヴァルツの不等式

(3) を証明するには，表題の不等式が必要になります。

実は「式と証明」において，例に挙げて証明しています。ここでは定理として再掲しましょう。

定理（コーシー・シュヴァルツの不等式） $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ を実数とするとき， **コーシー・シュヴァルツの不等式**

[1] $a>0$ のとき，$\sqrt{a}$ は，2 乗すると a となる「正」の数であり，$\sqrt{0}=0$ であった。

$$(a_1{}^2 + a_2{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2) \geqq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

このままでは，使えないのでちょっと変形します。
両辺ともに正なので，平方根をとっても同値。よって

$$\sqrt{(a_1{}^2 + a_2{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2)} \geqq |a_1b_1 + a_2b_2|$$

ここで $\sqrt{a^2} = |a|$ を用いました。

21.4　距離の性質の証明 (続)

「コーシー・シュヴァルツの不等式」を使うと，(3) は機械的に証明できます。

$d(A,\ B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ より，証明すべき式は

$$\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \leqq \sqrt{(c_1 - a_1)^2 + (c_2 - a_2)^2} + \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2}$$

このままでは非常にみずらいので，ちょっと書き直しましょう。

$$p_1 = c_1 - a_1,\ q_1 = b_1 - c_1,\ p_2 = c_2 - a_2,\ q_2 = b_2 - c_2$$

とおくと，$b_1 - a_1 = p_1 + q_1$ などに注意することで，上の不等式は

$$\sqrt{(p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2} \leqq \sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2} + \sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2}$$

となります。
両辺ともに正なので，2 乗しても同値[2]。
よって

$$(p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2 \leqq p_1{}^2 + p_2{}^2 + 2\sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2}\sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2} + q_1{}^2 + q_2{}^2$$

を証明すればよい。
左辺を展開し，右辺と合わせて整理すると，この不等式は

$$2p_1q_1 + 2p_2q_2 \leqq 2\sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2}\sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2}$$

と同値。さらにこれは両辺を 2 で割ると，

$$p_1q_1 + p_2q_2 \leqq \sqrt{p_1{}^2 + p_2{}^2}\sqrt{q_1{}^2 + q_2{}^2}$$

と同値。

[2] このテクニックは「式と証明」において紹介済みです。復習しておいてほしい。

ところで，

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sqrt{({p_1}^2+{p_2}^2)({q_1}^2+{q_2}^2)} \\
&\geqq |p_1q_1+p_2q_2| \quad (\text{ここでコーシー・シュヴァルツを用いた}) \\
&\geqq p_1q_1+p_2q_2 \quad (|a| \geqq a \text{ を用いた}) \\
&= (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

以上のことから，三角不等式が証明できました。

証明は大分大変な計算になりました。こういった証明を理解するには，上の計算を目で追うだけでなく，自分で紙に書いていくのがよい。試みてほしい。