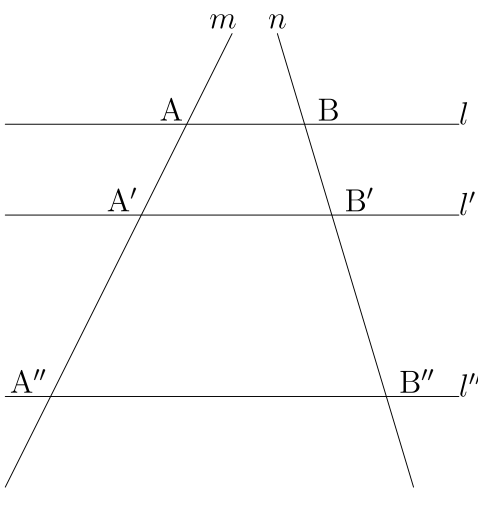
補 講22　定理「平行線の性質」の証明

22.0　はじめに

本補講では次の定理の証明を与えます。

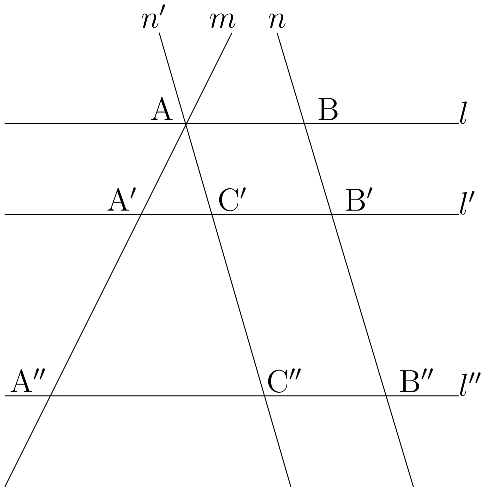
定理 (平行線の性質)　平行な 3 直線 l, l', l'' に 2 本の直線 m, n が図のように交わっている。このとき

$$\mathrm{AA'} : \mathrm{A'A''} = \mathrm{BB'} : \mathrm{B'B''}$$



22.1　証　明

図のように点 A を通り，直線 n に平行な直線 n' を描き，l', l'' との交点を C′, C″ とする。



$\triangle\,\mathrm{AA'C'}$ と $\triangle\,\mathrm{AA''C''}$ において，l' と l'' は平行なので，

$$\angle\ \mathrm{AA'C'} = \angle\ \mathrm{AA''C''} \quad (\text{同位角})$$

同様の理由によって

$$\angle\ \mathrm{AC'A'} = \angle\ \mathrm{AC''A''} \quad (\text{同位角})$$

よって

$$\triangle\,\mathrm{AA'C'} \backsim \triangle\,\mathrm{AA''C''} \quad (\text{二角})$$

対応する辺の比は等しいので，

$$\mathrm{AA'} : \mathrm{AC'} = \mathrm{AA''} : \mathrm{AC''}$$

この比の値を k とすると，

$$\mathrm{AA'} = k\ \mathrm{AC'}, \quad \mathrm{AA''} = k\ \mathrm{AC''}$$

よって

$$\begin{aligned} \mathrm{A'A''} &= \mathrm{AA''} - \mathrm{AA'} \\ &= k\ \mathrm{AC'} - k\ \mathrm{AC''} \\ &= k\ (\mathrm{AC'} - \mathrm{AC''}) \\ &= k\ \mathrm{C'C''} \end{aligned}$$

ゆえに $\mathrm{A'A''} : \mathrm{C'C''}$ の比の値は k。
つまり

$$\mathrm{AA'} : \mathrm{AC'} = \mathrm{A'A''} : \mathrm{C'C''}$$

$a : b = x : y$ ならば $a : x = b : y$ であるから[1]，

$$\mathrm{AA'} : \mathrm{A'A''} = \mathrm{AC'} : \mathrm{C'C''}$$

[1] $a : b = x : y$ ならば比の値が等しいので，

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

一方，m と m'，l と l' は平行なので，四角形 AC$'$B$'$B は平行四辺形。よって，AC$'$=B$'$B。

同様にして C$'$C$''$=B$'$B$''$。

よって
$$\mathrm{AA'} : \mathrm{A'A''} = \mathrm{BB'} : \mathrm{B'B''}$$

(証明終)

両辺に $\dfrac{b}{x}$ をかけると，
$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$
よって $a : x = b : y$ を得る。