問の解答例

1 各自で確かめてください。

2 11，13，17，19

3

$$\begin{array}{ll} (2,0,0), & (2,1,0) \\ (2,0,1), & (2,1,1) \\ (2,0,2), & (2,1,2) \end{array}$$

4 証明　与えられた整数は $10a+5b$ (ただし b は 0，1 のいずれか) と表すことができる。よって

$$10a+5b=5(2a+b)$$

となり，右辺は「5× (整数)」の形をしているので 5 の倍数である。　**(証明終)**

5 証明　与えられた整数が三桁以下のときは，明らかであろう。

与えられた整数が四桁以上のとき，その整数は $1000a+b$ (ただし b は三桁以下の整数) と表すことができる。いま下三桁が 8 の倍数なので，$b=8k$ (k は整数) と表すことができる。よって

$$1000a+b=8(125a+k)$$

となり，右辺は 8 の倍数である。　**(証明終)**

6 証明　何桁でやっても同じだから，四桁の整数で考えよう。千の位，百の位，十の位，一の位の数字をそれぞれ a，b，c，d とすると，与えられた整数は $1000a+100b+10c+d$ と表わすことができる。

さて，各桁の数字の和が 3 の倍数だとしよう。つまり $a+b+c+d$ が 3 の倍数であるとする。このとき

$$\begin{aligned} 1000a+100b+10c+d &= 999a+99b+9c+(a+b+c+d) \\ &= 3(333a+33b+3c)+(a+b+c+d) \end{aligned}$$

と変形できる。

ここで，$3(333a+33b+3c)$ は「3 × (整数)」の形をしているので 3 の倍数である。また $a+b+c+d$ も 3 の倍数であるとしたので，最後の式 $9(111a+11b+c)+(a+b+c+d)$ は 3 の倍数の和になっているので 3 の倍数である。

よって $1000a+100b+10c+d$ は 3 の倍数である。　**(証明終)**

7 みなさんの楽しみのためにわざと答えは書かないことにします。

9　証明　a' と b' の最大公約数が $d' > 1$ であるとすると，$a' = d'a''$, $b' = d'b''$ と書ける。

これを

$$a = a'd, \qquad b = b'd$$

に代入すれば,

$$a = a''dd', \qquad b = b''dd'$$

となり，dd' は a, b の公約数となる。今 $d' > 1$ だったので，$dd' > d$。これは d が a と b の「最大」公約数であることに矛盾する。 **(証明終)**

12　証明　二つの整数 a, b の最大公約数を d とすると，互いに素な整数 a', b' を用いて

$$a = a'd, \quad b = b'd$$

と書け，$l = a'b'd$ となる。

このとき,

$$\begin{aligned} ab &= a'd \times b'd = a'b'd^2 \\ dl &= d \times a'b'd = a'b'd^2 \end{aligned}$$

よって

$$ab = dl$$

(証明終)

13　(2)

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \overbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}^{n\text{ 個}} \\ &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m \times n\text{ 個}} \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} (ab)^n &= \overbrace{ab \times ab \times \cdots \times ab}^{n\text{ 個}} \\ &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}} \times \overbrace{b \times b \times \cdots \times b}^{n\text{ 個}} \\ &= a^n b^n \end{aligned}$$

14 (1)

$$\begin{array}{rcll} (a+b)^2 & = & (a+b)(a+b) & \text{(2 乗の定義)} \\ & = & a(a+b)+b(a+b) & \text{(分配法則)} \\ & = & a^2+ab+ba+b^2 & \text{(分配法則)} \\ & = & a^2+ab+ab+b^2 & \text{(積の交換法則)} \\ & = & a^2+2ab+b^2 & \text{(同類項をまとめた)} \end{array}$$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ も同様。

(2)

$$\begin{array}{rcll} (a+b)(a-b) & = & a(a-b)+b(a-b) & \text{(分配法則)} \\ & = & a^2-ab+ba-b^2 & \text{(分配法則)} \\ & = & a^2-ab+ab-b^2 & \text{(積の交換法則)} \\ & = & a^2-b^2 & \text{(同類項をまとめた)} \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{rcll} (x+a)(x+b) & = & (x+a)x+(x+a)b & \text{(分配法則)} \\ & = & x^2+ax+xb+ab & \text{(分配法則)} \\ & = & x^2+(a+b)x+ab & \text{(積の交換法則，分配法則)} \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{rcll} (ax+b)(cx+d) & = & ax(cx+d)+b(cx+d) & \text{(分配法則)} \\ & = & acx^2+adx+bcx+bd & \text{(分配法則，積の交換法則)} \\ & = & acx^2+(ad+bc)x+bd & \text{(分配法則)} \end{array}$$

(5) の第二式

$$\begin{array}{rcll} (a-b)^3 & = & (a-b)^2(a-b) & \text{(3 乗の定義)} \\ & = & (a^2-2ab+b^2)(a-b) & \text{(和の 2 乗の展開公式)} \\ & = & (a^2-2ab+b^2)\times a-(a^2-2ab+b^2)\times b & \text{(分配法則)} \\ & = & a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3 & \text{(分配法則，積の交換法則)} \\ & = & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 & \text{(同類項をまとめた)} \end{array}$$

15 たとえば，$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ は $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ の b を $-b$ で置き換えれば，左辺，右辺はそれぞれ

$$\{a+(-b)\}^2 = (a-b)^2,\ a^2+2a\times(-b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

となるので，

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

を得る。

16 この問いはわざと解答を書かないことにします。このシリーズのどこかに解答が現れますので，それを楽しみに勉強を続けてください。

17

$$\begin{aligned}
a^m \div a^n &= \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{ 個}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}}} \\
&= \frac{\overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}} \times \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m-n\text{ 個}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個}}} \\
&= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m-n\text{ 個}} \\
&= a^{m-n}
\end{aligned}$$

18 (1) 割る式 $B = x+2$，商 $Q = x+1$，余り $R = -11$ なので，

$$\begin{aligned}
BQ + R &= (x+2)(x+1) - 11 \\
&= x^2 + 3x + 2 - 11 \\
&= x^2 + 3x - 9 = A
\end{aligned}$$

確かに成り立っている。

(2) $B = 2x-3$，$Q = 2x+1$，$R = 6$ なので，

$$\begin{aligned}
BQ + R &= (2x-3)(2x+1) + 6 \\
&= 4x^2 - 4x - 3 + 6 \\
&= 4x^2 - 4x + 3 = A
\end{aligned}$$

確かに成り立っている。

(3) $B = x^2 - 3x - 2$，$Q = 3x+1$，$R = 9x+6$ なので，

$$\begin{aligned}
BQ + R &= (x^2 - 3x - 2)(3x+1) + (9x+6) \\
&= 3x^3 + x^2 - 9x^2 - 3x - 6x - 2 + 9x + 6 \\
&= 3x^3 - 8x^2 + 4 = A
\end{aligned}$$

確かに成り立っている。

(4) $B = x^2 + x + 1$，$Q = x-1$，$R = 0$ より，

$$\begin{aligned}
BQ + R &= (x^2 + x + 1)(x-1) + 0 \\
&= x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 \\
&= x^3 - 1 = A
\end{aligned}$$

確かに成り立っている。

19 (6)

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^2\\ &= a^3+b^3\end{aligned}$$

(7) (6) の等式で，b を $-b$ で置き換えれば得られる ($(-b)^3=-b^3$ に注意!)。

20 レポート問題にします。意欲のある方は，ご提出ください。

21

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

であり，$\sqrt{2}>0,\ \sqrt{3}>0$ より，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>0$。

つまり，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ は 2 乗すると $\dfrac{2}{3}$ となる正の数。よって，

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

22 上の 2 と 3 をそれぞれ $a,\ b$ に置き換えて書き直せば，証明になります。

23

$$\begin{aligned}1\times a &= a\times 1 \quad \text{（乗法の交換法則を使った）}\\ &= a \quad \text{（上の } a\times 1=a \text{ を使った）}\end{aligned}$$

24

$$\begin{aligned}(a+b)c &= c(a+b) \quad \text{（乗法の交換法則を使った）}\\ &= ca+cb \quad \text{（上の分配法則を使った）}\\ &= ac+bc \quad \text{(乗法の交換法則を使った)}\end{aligned}$$

25

$$1+(-1)=0$$

の両辺に a をかけると，

$$\{1+(-1)\}\times a=0\times a$$

左辺は展開し，右辺も計算すると，

$$a+(-1)a=0$$

両辺から a を引くと，

$$(-1)a=-a$$

26

$$1+(-1)=0$$

の両辺に -1 をかけ，整理すると，

$$-1+(-1)\times(-1)=0$$

両辺に 1 を加えると，

$$(-1)\times(-1)=1$$

27 $a>0$ の両辺から a を引くと，

$$a-a>0-a$$

よって，

$$0>-a$$

28 (2) $a>b$ より $a-b>0$。

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b>0$$

よって $a+c>b+c$

(4) $c<0$ より $-c>0$。$a>b$ の両辺に $-c$ をかけると，

$$a\times(-c)>b\times(-c)$$

よって

$$-ac>-bc$$

両辺に $ac+bc$ を加えると，

$$bc>ac$$

$\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$ も同様。

(5) $a>b,\ c>d$ より，$a-b>0,\ c-d>0$。よって $(a-b)+(c-d)>0$。さて，

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)>0$$

ゆえに $a+c>b+d$

(6) $a>b$ とすると，$a\leqq b$ に矛盾。$a<b$ とすると，$a\geqq b$ に矛盾。

よって，$a=b$

29 (1)

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{ただし } a\geqq 0\ ) \\ -a & (\text{ただし } a<0) \end{cases}$$

より，$a\geqq 0$ のとき，$|a|=a$ なので，$|a|\geqq 0$。

$a<0$ のとき，$-a>0$ で，$|a|=-a$ より，$|a|>0$。

以上を合わせて，$|a|\geqq 0$。

$(1)'$ $a=0$ のとき，$|a|=0$ は定義から明らか。

$|a|=0$ とすると，$|a|=\sqrt{a^2}$ より，$\sqrt{a^2}=0$。両辺を 2 乗して，$a^2=0$。

「方程式解法の原理」より，$a=0$。

(2) まず,

$$\frac{1}{|b|} = \left|\frac{1}{b}\right|$$

を示す。

$$|b|\left|\frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b}{b}\right| = 1$$

より，両辺を $|b|$ で割ると,

$$\frac{1}{|b|} = \left|\frac{1}{b}\right|$$

さて,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{b}\right| &= \left|a \times \frac{1}{b}\right| \\ &= |a| \times \left|\frac{1}{b}\right| \\ &= |a| \times \frac{1}{|b|} \\ &= \frac{|a|}{|b|}\end{aligned}$$

(3) $a \geqq 0$ のとき，$-a \leqq 0$。よって,

$$|a| = a, \quad |-a| = -(-a) = a$$

$a < 0$ のとき，$-a > 0$。よって,

$$|a| = -a, \quad |-a| = -a$$

いずれの場合も

$$|a| = |-a|$$

30 証明　$x \in A \cap B$ とする。$x \in A$ かつ $x \in B$ なので，$x \in A$ は必ず成り立っている。よって $A \cap B \subset A$。

逆に $x \in A$ とする。$A \subset B$ より，$x \in B$。つまり $x \in A$ かつ $x \in B$ が成り立つ。よって，$x \in A \cap B$。ゆえに，$A \subset A \cap B$。

以上のことから,

$$A \cap B = A$$

31 証明　$x \in A$ とする。

$A = A \cap B$ より，$x \in A \cap B$。よって，$x \in B$。ゆえに，$A \subset B$。

32 レポート問題とします。解答に自信のない方は，ご提出ください。

33 これもレポート問題とします。

34 証明

p	q	r	p	$\wedge$	$(q\vee r)$	$(p\wedge q)$	$\vee$	$(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F

以上の計算から，$p\wedge(q\vee r)$ と $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ の真理表が一致するので，これらは論理的に同値である。

$p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ についても同様。 **(証明終)**

35 127ページにある例題の解答参照。

36 レポート問題とします。

37

$$\begin{aligned}(p(x)\vee q(x)\text{ の真理集合}) &= \{x|p(x)\vee q(x)\text{ が真 }\}\\ &= \{x|(p(x)\text{ が真})\vee(q(x)\text{ が真})\}\\ &= \{x|(x\in P)\vee(x\in Q)\}\\ &= P\cup Q\end{aligned}$$

38 $P\cap(Q\cup R)$ は $p(x)\wedge(q(x)\vee r(x))$ の真理集合であり，$(P\cap Q)\cup(P\cap R)$ は $(p(x)\wedge q(x))\vee(p(x)\wedge r(x))$ の真理集合になっている。

今 $p(x)\wedge(q(x)\vee r(x))$ と $(p(x)\wedge q(x))\vee(p(x)\wedge r(x))$ は論理的に同値。

よって $P\cap(Q\cup R)=(P\cap Q)\cup(P\cap R)$。

39 解答は省略します。

40

$$\overline{\exists x,\ p(x)} \iff \forall x,\ \overline{p(x)}$$

41 (2)

$$(A-C)-(B-C)=A-C-B+C=A-B$$

ここで仮定から $A-B=0$ なので，$(A-C)-(B-C)=0$。ゆえに $A-C=B-C$。

(3)

$$AC-BC=(A-B)C=0\times C=0$$

よって $AC=BC$。

(4)

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}=0$$

よって $\dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{C}$。

42　直接証明する方法はみなさんにお委せします。ここでは，定理「等式の性質——その1」を用いた証明を与えましょう。

(1) 定理「等式の性質——その1」(2) より，

$$(A+C)-C=(B+C)-C$$

これを整理すれば，

$$A=B$$

を得る。

残りについても同様です。読者自らやってみてください。

43　レポート問題とします。

44 レポート問題とします。

45 これもレポート問題としましょう。

46 **(1)** $y=0$ より，y の値は 0。これを第一の式に代入すると $ax+b=0$。

x_0 はこの方程式の解であったから，$(x_0,\ 0)$ が問題の連立方程式の解になっている。

(2) x 軸である。

(3) 以上から，$ax+b=0$ の解は，$y=ax+b$ と x 軸との交点の x 座標になっている。

47 x_0 と y_0 に任意の値を代入すると，もとの方程式は z に関する方程式となる。これは必ず解ける。今 x_0 と y_0 は任意。つまり，無数に代入する値の組が考えられる。よって $ax+by+cz+d=0$ は無数の解を持つ。

48 各自で実行してください。

49 $(1)\times 2+(2)\times 3$ によって，y が消える。$(2)\times 2-(3)$ によって，もう一つ y の消えた式が得られる。これらを連立させて，$x,\ z$ の値を求める。

50 $ax^2=2\times x\times x$ ですから，もとの方程式は

$$a\times x\times x=0$$

となります。「方程式解法の原理」から

$$a=0 \text{ または } x=0 \text{ または } x=0$$

となります。今明らかに $a\neq 0$ ですから，この場合はありえません。よって $x=0$ または $x=0$ となり，$x^2=0$ の場合となり，$=0$ という結論が得られます。この場合もこれ以外に解はありえません。

51 平方根の性質から，

$$\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

です。

ところで「実数の性質」で説明したように

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (\text{ただし } a \geqq 0\ ) \\ -a & (\text{ただし } a \text{ は負の数}) \end{cases}$$

です。

よって今の場合も a の符号に応じて

$$\sqrt{4a^2} = \begin{cases} 2a & (a > 0\ ) \\ -2a & (a < 0) \end{cases}$$

となります[2]。

よって $a > 0$ のとき

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (\text{復号同順})$$

であり，$a < 0$ のとき，

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\left(-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (\text{復号同順})$$

ですが，最後の式は $\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ に等しい。

つまり a の符号に関係なく，

$$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (\text{復号同順})$$

です。

52 素直に，解の公式を用いて計算する。

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a} \\ &= \frac{2\left(-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}\right)}{2a} \\ &= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a} \end{aligned}$$

[2]今 $a \neq 0$ なので，$a > 0$ の場合と $a < 0$ の場合のみを考えることになります。

53　証明　背理法を用いましょう。つまり「$D > 0$ でない」とします。すると $D = 0$ または $D < 0$ です。

$D = 0$ とすると，一番最初の系から解の個数は 1 個となり，仮定に矛盾します。

$D < 0$ とすると，同様にして解の個数は 0 個となり，これも仮定に矛盾します。

よって $D > 0$。 **(証明終)**

54 たとえば，$x = 4$ と $x = \dfrac{5}{2}$

補注　解はいつでも整数ばかりとは限りませんね。ここでは分数を与えましたが，$\sqrt{5}$ も解になっていますね。 **(補注終)**

55　「平方根の計算」で，

定理 (実数の平方)　どんな数 a についても $a^2 \geqq 0$

という定理を証明しました。言い替えると，$x^2 < 0$ となるような数は存在しないということです。よって $x^2 < 0$ は解を持ちません。

次に $x^2+y^2 \leqq 0$ としましょう。上の定理より $x^2 \geqq 0$, $y^2 \geqq 0$ ですから，$x^2+y^2 \geqq 0$。与えられた不等式とあわせると，$x^2 + y^2 = 0$ となります。y^2 を移項すると $x^2 = -y^2$。左辺は $\geqq 0$，右辺は $\leqq 0$ ですから，$x^2 \geqq 0$ かつ $x^2 \leqq 0$。よって $x^2 = 0$。2 次方程式のところでやったように，この解は $x = 0$ のみ。これを $x^2 + y^2 = 0$ に代入すると，$y^2 = 0$。よって $y = 0$ を得る。ゆえにもとの不等式の解は $x = y = 0$ のみです。

56 ヒントにあるように，理科の教科書を調べてください。

57 たとえば，$y = -3x + 1$ と $y = -2x + 1$ で考えてみてください。

58 後の解説をご覧ください。

59 レポート問題とします。

60 みなさんにお任せします。

61

62 たとえば，$y = -x^2$, $y = -3x^2$, $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ などのグラフを描いてみてください。

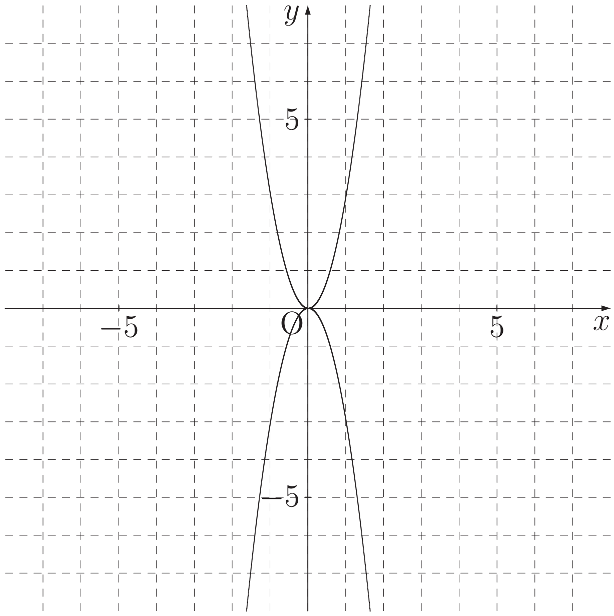
63　たとえば，$x^2 - 5x + 6 > 0$, $x^2 - 5x + 6 < 0$, $x^2 - 5x + 6 \geqq 0$, $x^2 - 5x + 6 \leqq 0$, $x^2-2x+1 > 0$, $x^2-2x+1 < 0$, $x^2-2x+1 \geqq 0$, $x^2-2x+1 \leqq 0$, $x^2+x+1 > 0$, $x^2+x+1 < 0$, $x^2+x+1 \geqq 0$, $x^2+x+1 \leqq 0$ の 12 通りで考えてみてください。

64 $a > 0$ の場合の脚注を参考にして書き下してみてください。

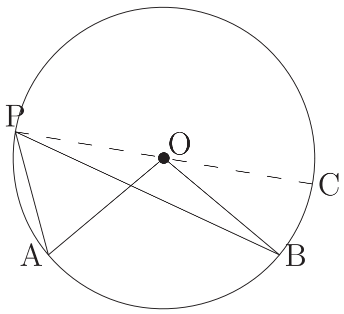
65 (ア) を真似して書き下してください。

66 これもここまでのことをよく読んで，真似をして証明を書き下してみてください。

67 必要十分条件は，a, b, c のいずれも正か，a, b, c のいずれか二つだけが負となります。



結果がわかっていれば，手間は増えますが，証明は $ab > 0$ のものと同様です。チャレンジしてください。
68 レポート問題とします。
69 これもレポート問題とします。
70 各自試みてください。
71 $x^2 + x + 1 \geqq 0$ は「すべての実数」，$x^2 + x + 1 \leqq 0$ は「解なし」。
72 レポート問題とします。
73 斜辺上にきますね。
74 実際に作図して確かめてください。
75 丁寧に作図すれば見えてくるでしょう。
76 みなさんにお任せします。
77 各自実行してください。
78 図のように記号を定める。



∠APC は弧 AC に対する円周角であり，∠AOC はその中心角で，O は PC 上に

ある。ゆえに (1) より，

$$\angle \mathrm{OPA} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{COA}$$

同様にして，

$$\angle \mathrm{OPB} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{COB}$$

よって，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{APB} &= \angle \mathrm{OPA} - \angle \mathrm{OPB} \\ &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{COA} - \frac{1}{2}\angle \mathrm{COB} \\ &= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{COA} - \angle \mathrm{COB}) \\ &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{AOB}\end{aligned}$$

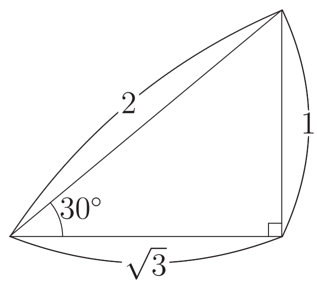
79　(1) の証明をほとんどそのまま書き写すだけですから，みなさんにお任せします。

80　P が外部にあっても，内部の場合の証明がそのまま使えます。確認してください。

81　△PAC と△PDB が相似ですね。頂点の対応に注意してください。そうすれば，本文で与えた定理「方べきの定理の逆」の証明がそのまま使えることがわかるでしょう。

確認してください。

82　頭の中で図を回転させることができる人は構いませんが，そうでない人は面倒臭がらずに，図を描きましょう。



上の図より，

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

83　みなさんにお任せします。

84　図の $\tan A$ と書かれたところまでの縦の線分の長さが，正接の値になっています。

85　みなさんにお任せします。

86

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 135^\circ = -1$$
$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

87

$$\sin 180^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1, \quad \tan 180^\circ = 0$$

88

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	値なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

89 $\cos\theta$ については説明と同様，$\tan\theta$ については，三角比のもともとの定義と変わりありません。

90 点 $(1,\ 0)$ で単位円に接する直線を描く。角 θ の作る半直線と，これらの接線との交点の y 座標が $\tan\theta$ の値になる。

$\theta = 90^\circ$ のときには，θ の作る半直線は，これらの接線と平行となり，交点ができない。よって，値が求められない。

91 θ が 0° から 180° まで変わっていくことをイメージすると，x は 0 から 1，そして再び 0 へと変化しています。

92 みなさんにお任せします。

93 (2) の証明と同じように記号を定めておくと，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

また，

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

補注　本文で証明したように，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ が成り立っています。これは，$x^2+y^2=1$ と書き換えることができます。この事実を (3) の証明で用いています。　**(補注終)**

94 値を代入して成り立つことを確かめるだけですから，みなさんにお任せします。

95 A が直角のときには AB$= c$ が底辺，AC$= c$ が高さと考えれば，

$$S = \frac{1}{2}bc$$

一方，$\sin 90^\circ = 1$ なので，

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc$$

よって，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

が成り立つ。

96

$$\begin{array}{rl} & x^2 \quad +2x \\ \cline{2-2} x-2 \big) & x^3 \qquad\quad -4x+1 \\ & x^3 -2x^2 \\ \cline{2-2} & \qquad 2x^2 -4x \\ & \qquad 2x^2 -4x \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} & x^2 \quad -x \quad -3 \\ \cline{2-2} x+1 \big) & x^3 \qquad\quad -4x+1 \\ & x^3 +x^2 \\ \cline{2-2} & \quad -x^2 -4x \\ & \quad -x^2 \quad -x \\ \cline{2-2} & \qquad\quad -3x+1 \\ & \qquad\quad -3x-3 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad 4 \end{array}$$

確かに $P(x)$ を $x-2$ や $x+1$ で割った，余りはそれぞれ 1，4。

97　$P(x)$ を $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とする。除法の原理より，

$$P(x) = (ax+b)Q(x) + R$$

よって

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{b}{a}\right) &= \left\{a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right\}Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \\ &= (-b+b)Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \\ &= R \end{aligned}$$

ゆえに，整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ に等しい。

98　$P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるということは，余りが 0。一方 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$。ゆえに，

$$P(\alpha) = 0$$

99 証明はわざと書かないことにします。もしどうしても自信がないときには，私あてにレポートとして出してみてください。

100　この解答も書かないことにします。

101　$\Longrightarrow$) $ax^2+bx+c=0$ が x に関する恒等式であるとする。$0 = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$ と考えると，

$$ax^2+bx+c = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$$

定理「整式が恒等式になるための条件その 1」より，

$$a = 0,\ b = 0,\ c = 0$$

$\Longleftarrow$) $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$ とすると，x がどんな値であっても，

$$ax^2 + bx + c = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$$

102 $\Longrightarrow$) $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x に関する恒等式であるとする。移項して

$$(ax^2 + bx + c) - (a'x^2 + b'x + c') = 0$$

も x に関する恒等式である。よって，

$$(a - a')x^2 + (b - b')x + (c - c') = 0$$

も x に関する恒等式。ゆえに系「整式が恒等式になるための条件その 2」より，$a - a' = 0,\ b - b' = 0,\ c - c' = 0$。すなわち

$$a = a',\ b = b',\ c = c'$$

$\Longleftarrow$) $a = a',\ b = b',\ c = c'$ ならば，任意の x について，

$$(ax^2 + bx + c) - (a'x^2 + b'x + c') = (a - a')x^2 + (b - b')x + (c - c') = 0$$

よって $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ は x に関する恒等式である。

103

与えられた式の部分分数分解は

$$\frac{1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{2x-1}$$

という形をしている。右辺を通分すると，

$$\frac{1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(2a+2b)x + (-a+b)}{(2x+1)(2x-1)}$$

これが恒等式なので，

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

これを解くと，$a = -\dfrac{1}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$。よって，

$$\frac{1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2x+1} + \frac{1}{2x-1}\right)$$

104

$$
\begin{aligned}
& (\text{左辺}) - (\text{右辺}) \\
= \ & (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 \\
= \ & a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2 \\
& -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx) \\
= \ & (a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2) \\
= \ & (ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2
\end{aligned}
$$

$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ は実数なので，$ay-bx,\ bz-cy,\ cx-az$ は実数。よって $(ay-bx)^2 \geqq 0,\ (bz-cy)^2 \geqq 0,\ (cx-az)^2 \geqq 0$。つまり $(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0$。ゆえに

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

105　両辺ともに 0 以上のなので，2 乗しても同値。そこで

$$|a+b|^2 \geqq ||a|-|b||^2$$

を証明する。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= |a+b|^2 - ||a|-|b||^2 \\
&= |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(|a|-|b|)^2 \\
&= a^2+2|a||b|+b^2-(a^2-2ab+b^2) \\
&= 2(|a||b|+ab) \\
&= 2(|ab|+ab)
\end{aligned}
$$

$a,\ b$ が同符号のとき $ab \geqq 0$ なので，$2(|ab|+ab) = 4ab \geqq 0$。

また $a,\ b$ が異符号のときは $ab \leqq 0$ なので，$2(|ab|+ab) = 2(-ab+ab) = 0$。

よっていずれの場合も $2(|ab|+ab) \geqq 0$。ゆえに，

$$|a+b|^2 \geqq ||a|-|b||^2$$

つまり，

$$|a+b| \geqq ||a|-|b||$$

補注　実はこの不等式 $|a+b| \geqq ||a|-|b||$ は，三角不等式 $|a+b| \leqq |a|+|b|$ を用いた方が少し簡単に証明できます。実際

$$|a| = |a+b-b| \leqq |a+b|+|-b| = |a+b|+|b|$$

よって

$$|a+b| \geqq |a|-|b|$$

また，同様にして

$$|b| = |a+b-a| \leqq |a+b|+|a|$$

なので，

$$|a+b| \geqq |b|-|a|$$

一方，

$$||a|-|b|| = \begin{cases} |a|-|b| \\ -(|a|-|b|) = |b|-|a| \end{cases}$$

よって，

$$|a+b| \geqq ||a|-|b||$$

$|a| = |a+b-b|$ といった変形がポイントになっています。 **(補注終)**

106

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺}) &= \frac{a+b}{2}-\sqrt{a}\sqrt{b} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\end{aligned}$$

$a>0,\ b>0$ より $\sqrt{a},\ \sqrt{b}$ は実数。よって $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$。

107 $(-\sqrt{a}i)^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = a \times (-1) = -a$

108 足し算と引き算，そしてかけ算はみなさんにお任せします。

さてまず

$$(c+di)(c-di) = c^2-(di)^2 = c^2-d^2i^2 = c^2-d^2 \times (-1) = c^2+d^2$$

に注意しましょう。このとき，

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

109 $z = c+di,\ z'' = a+bi,\ z' = x+yi$ とする。$zz' = z''$ なので，

$$(c+di)(x+yi) = a+bi$$

左辺を展開すると，

$$(cx-dy)+(cy+dx)i = a+bi$$

「複素数の相等」より

$$\begin{cases} cx-dy &= a \\ dx+cy &= b \end{cases}$$

を得る。これを解く[3]と，

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

よって，

$$z' = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

110 みなさんにお任せします。
111 ひたすら計算してください。
112

$$\begin{aligned}(a+bi) \times \frac{a-bi}{a^2+b^2} &= \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

113 この場合は成り立ちます。証明はレポート問題とします。
114 $i < 0$ なら，$-i > 0$。よって，$(-i)^2 > 0$ より，$-1 > 0$。矛盾。
115

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

116 レポート問題とします。
117 内分点の定義より，AP：PB $= 1:2$ 。また AP $= |p-2|$，PB$= |5-p|$ ですから，

$$|p-2| : |5-p| = 1:2$$

「内項の積は外項の積に等しい」ので

$$2 \times |p-2| = 1 \times |5-p|$$

ここで $2 < p < 5$ に注意すれば，$|p-2| = p-2$，$|5-p| = 5-p$ なので，

$$2(p-2) = 5-p$$

[3]この連立１次方程式の解き方は，補講を参照してください。

これを解くと，$p=3$。
118 みなさんにお任せします。
119 各自で描いてください。
120 (II) のとき，$q<a<b$ なので，$(a-q):(b-q)=m:n$ であることなどに注意して，各自で書き上げてください。
121 $m,\ n$ の正負によって，場合分けをし，上の定義を忠実になぞればできます。各自やってください。
122 $m:(-n)$ に分ける点は,
$$\frac{-na+mb}{m-n}$$
一方，$(-m):n$ に分ける点は,
$$\frac{na-mb}{-m+n}=\frac{-(-na+mb)}{-(m-n)}=\frac{-na+mb}{m-n}$$

123 みなさんにお任せします。
124 これもみなさんにお任せします。
125 面倒臭がらずに，計算してくださいね!
126 レポート問題とします。
127 上の，a_1 などを a_2 に直せばいいですね。
128 レポート問題します。
129 必ず一致するはずです。例の設定で，確かめてください。あるいは，一般的な状況を自分で設定して計算し，確認してください。
130 a と b の役割を入れ換えるだけです。
131 みなさんにおまかせします。
132 平方完成すると,
$$\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{l^2+m^2-4n}{4}$$
右辺が半径に相等する。
よって,
$$l^2+m^2-4n>0$$
が必要十分条件。
133 x_0 と y_0 の役割を入れ換えるだけです。
134 最初の $m\times\dfrac{y_0}{x_0}$ と次の $m=-\dfrac{x_0}{y_0}$ を考えることが可能であることに使われている。
「分母が 0 の分数は考えることができない」という注意があったことを思いだしてください。
135 みなさんにお任せします。

136 証明　与えられた式の左辺は，初項 1，公差 1 の等差数列の和である。その和を S_n とすると，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n(2 \times 1 + (n-1) \times 1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

(証明終)

139 みなさんにお任せします。
140 (1) の分数のものは，上の証明を分数で書き直せばよい。
(2) は両辺を n 乗する。
(3) は両辺を mn 乗する。
141 証明　左辺を np 乗すると

$$\left(\sqrt[np]{a^{mp}}\right)^{np} = a^{mp}$$

また，右辺を np 乗すると，

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left\{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$$

よって，

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

(証明終)

142 みなさんにお任せします。
143 レポート問題とします。
144 みなさんにお任せします。
145 みなさんにお任せします。
150 レポート問題とします。
155

$x°$	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°
θ rad	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π

162
182 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97　の 25 個。
189 単に分母を有理化するだけですから，みなさんにおまかせします。
190 ひたすら計算すれば得られますので，みなさんにお任せします。

象　限	第　1	第　2	第　3	第　4
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

191

$$\left|\frac{1}{i}\right| = \frac{|1|}{|i|} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

192 (2) の議論をまねすればできます。
193 a と b の役割を入れ換えて，書けばいいですね。